

A

Παράδοση: 28/11/2016



μν

Συντάκτης: Δημήτριος Π. Σπυριδίου  
Εργασία 1  
Καθηγητές: Κυριακή Κ.  
Γκιναρίδης Δ.

1<sup>ο</sup> ΜΕΡΟΣ ΚΥΡΙΑΚΗ

σελίδα 165 άσκηση 15

Έχουμε την διαφορική εξίσωση  $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$

Ξέρουμε ότι η  $y = \varphi(t)$  είναι λύση της

$$\text{Άρα } \varphi''(t) + p(t) \cdot \varphi'(t) + q(t) \cdot \varphi(t) = g(t) \quad (1)$$

Εξετάζουμε αν η  $y = c\varphi(t)$  είναι λύση

για να είναι αρέσει να ισχύει:

$$c\varphi''(t) + p(t) \cdot c\varphi'(t) + q(t) \cdot c\varphi(t) = g(t) \Rightarrow$$

$$c(\varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t)) = g(t) \quad (2)$$

Συμψύνω με την (1)

$$(2) \Rightarrow c g(t) = g(t) \Rightarrow (c-1)g(t) = 0$$

Γινρίζουμε ότι  $c \neq 1 \Rightarrow c-1 \neq 0$  ✓

Άρα έχουμε  $g(t) = 0$  το οποίο είναι άστοχο διότι ανι μηδέν

η  $g(t)$  δεν είναι ταυτοτικά μηδενική

Άρα η  $y = c\varphi(t)$  δεν είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

Αυτί συμβαίνει διότι η διαφορική μας εξίσωση δεν είναι ομογενής

σελίδα 165 άσκηση 16

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Έστω  $y_1, y_2$  δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης  
με  $y_1(t) = \sin(t^2)$

Υπολογίστε την ορίζουσα Wronski:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin(t^2) & y_2 \\ 2t \cos(t^2) & y_2' \end{vmatrix}$$

Υπολογίστε την ορίζουσα Wronski στο 0:

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} \sin(0) & y_2 \\ 2 \cdot 0 \cdot \cos(0) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 0 & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

Άρα άρα, η  $y_1(t) = \sin(t^2)$  δεν είναι λύση της  
διαφορικής εξίσωσης

Άσκηση 165 ασκήσεων 21

Η ορίζουσα Wronski των  $y_1$  και  $y_2$  είναι

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Η ορίζουσα Wronski των  $y_3 = a_1 y_1 + a_2 y_2$  και  $y_4 = b_1 y_1 + b_2 y_2$  είναι:

$$W(y_3, y_4) = \begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ y_3' & y_4' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 y_1 + a_2 y_2 & b_1 y_1 + b_2 y_2 \\ a_1 y_1' + a_2 y_2' & b_1 y_1' + b_2 y_2' \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 y_1 + a_2 y_2)(b_1 y_1' + b_2 y_2') - (a_1 y_1' + a_2 y_2')(b_1 y_1 + b_2 y_2) =$$

$$= \cancel{a_1 y_1 b_1 y_1'} + a_1 y_1 b_2 y_2' + a_2 y_2 b_1 y_1' + \cancel{a_2 y_2 b_2 y_2'} - \cancel{a_1 y_1' b_1 y_1} - a_1 y_1' b_2 y_2 - \cancel{a_2 y_2' b_1 y_1} - \cancel{a_2 y_2' b_2 y_2} =$$

$$= (a_1 b_2)(y_1 y_2' - y_1' y_2) - (a_2 b_1)(y_1 y_2' - y_1' y_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(y_1 y_2' - y_1' y_2)$$

$$\text{Άρα } W(y_3, y_4) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) W(y_1, y_2)$$

Για να συμπεράσουμε οι  $y_3, y_4$  θημελιώδεις ουσιαστικά λύσεις  
θα πρέπει  $W(y_3, y_4) \neq 0$

$$\text{Άρα θα πρέπει } a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

σελίδα 185 άσκηση 40

Έχουμε την διαφορική εξίσωση  $t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0$ ,  $t > 0$

$$\text{έχουμε } t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 3t \frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

$$\text{Θέτουμε } x = \ln t$$

$$\text{έχουμε } \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{t} \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{t^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{t^2} \frac{dy}{dx}$$

Καταμε αντιστάση των αντισταθμισμάτων που βρήκαμε στην διαφορική μας εξίσωση:

$$t^2 \left( \frac{1}{t^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{t^2} \frac{dy}{dx} \right) - 3t \left( \frac{1}{t} \frac{dy}{dx} \right) + 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} + 4y = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r - 2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \xrightarrow{x = \ln t} y(t) = C_1 e^{2 \ln t} + C_2 \ln t e^{2 \ln t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y(t) = C_1 t^2 + C_2 \ln t e^{\ln t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = C_1 t^2 + C_2 \ln t \cdot t^2$$

σελίδα 166 άσκηση 35

$$t^2 y'' - 2y' + (3+t)y = 0$$

Γράψουμε την εξίσωση στην καθιερωμένη μορφή:

$$y'' - \frac{2}{t^2} y' + \frac{(3+t)}{t} y = 0 \quad \text{οπότε} \quad p(t) = \frac{2}{t^2}$$

Οι  $y_1$  και  $y_2$  αντιστοιχούν θρηματικές σύνολο λύσεων

$$w(y_1, y_2)(t) = C \cdot e^{-\int \frac{2}{t^2} dt} = C \cdot e^{-\frac{2}{t}}$$

$$\text{Λόγω ότι } w(y_1, y_2)(2) = 3 \Rightarrow C \cdot e^{-1} = 3 \Rightarrow C = 3e$$

$$\text{Άρα } w(y_1, y_2)(t) = 3e^{1-\frac{2}{t}}$$

$$\text{Υπολογίζουμε } w(y_1, y_2)(4) = 3e^{1-\frac{2}{4}} = 3e^{1/2} = 3\sqrt{e}$$

σελίδα 166 άσκηση 39

Έστω ότι οι  $y_1$  και  $y_2$  αντιστοιχούν θρηματικές σύνολο λύσεων

Έστω ότι οι  $y_1$  και  $y_2$  έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο  $t_0$

$$\text{Τότε } y_1'(t_0) = 0 \text{ και } y_2'(t_0) = 0$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα Wronski στο σημείο  $t_0$

$$w(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Το οποίο είναι άσολο οι  $y_1$  και  $y_2$  δεν μπορεί να αντιστοιχούν θρηματικές σύνολο λύσεων στο  $I$ .

σελίδα 166 άσκηση 40

Έχουμε την διαφορική εξίσωση  $y'' + p(t) \cdot y' + q(t) \cdot y = 0$

Έστω ότι οι  $y_1$  και  $y_2$  αποτελούν θμελιώδεις ομόλο λύσεις

Έστω ότι οι  $y_1$  και  $y_2$  είναι κοινό σημείο καμιάς  $t_0$

Τότε θα ισχύει ότι  $y_1''(t_0) = y_2''(t_0) = 0$

Α τα αντικαθιστούμε στην διαφορική μας εξίσωση προκύπτει:

$$\bullet p(t_0) \cdot y_1'(t_0) + q(t_0) \cdot y_1(t_0) = 0 \quad (1)$$

$$\bullet p(t_0) \cdot y_2'(t_0) + q(t_0) \cdot y_2(t_0) = 0 \quad (2)$$

Η ορίζουσα Wronski στο  $t_0$  είναι:

$$w(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(t_0) \cdot y_2'(t_0) - y_1'(t_0) \cdot y_2(t_0) \quad (3)$$

Διακρίνωμε περιπτώσεις:

• Αν  $p(t_0) \neq 0$  και  $q(t_0) = 0$  τότε:

$$(1) \Rightarrow y_1'(t_0) = 0$$

$$(2) \Rightarrow y_2'(t_0) = 0$$

$$(3) \Rightarrow w(y_1, y_2)(t_0) = 0$$

Άρα οι  $y_1$  και  $y_2$  δεν αποτελούν θμελιώδεις ομόλο λύσεις

• Αν  $p(t_0) = 0$  και  $q(t_0) \neq 0$  τότε:

$$(1) \Rightarrow y_1(t_0) = 0$$

$$(2) \Rightarrow y_2(t_0) = 0$$

$$(3) \Rightarrow w(y_1, y_2)(t_0) = 0$$

Άρα οι  $y_1$  και  $y_2$  δεν αποτελούν θμελιώδεις ομόλο λύσεις

• Αν  $p(t_0) \neq 0$  και  $q(t_0) \neq 0$  τότε:

$$(1) \Rightarrow y_1'(t_0) = \frac{-q(t_0) y_1(t_0)}{p(t_0)}$$

$$(2) \Rightarrow y_2'(t_0) = \frac{-q(t_0) y_2(t_0)}{p(t_0)}$$

σελίδα 238 άσκηση 7

$$f_1(t) = 2t - 3, \quad f_2(t) = t^2 + 1, \quad f_3(t) = 2t^2 - t$$

Σχηματίζουμε τον γραμμικό συνδυασμό

$$\begin{aligned} k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) &= k_1(2t - 3) + k_2(t^2 + 1) + k_3(2t^2 - t) = \\ &= 2tk_1 - 3k_1 + t^2k_2 + k_2 + 2t^2k_3 - tk_3 = \\ &= (-3k_1 + k_2) + (2k_1 - k_3)t + (k_2 + 2k_3)t^2 \end{aligned}$$

Τον εξισώνουμε με το μηδέν και έχουμε:

$$(k_2 - 3k_1) + (2k_1 - k_3)t + (k_2 + 2k_3)t^2 = 0$$

Για να μηδενίζεται αυτή η έκφραση θα πρέπει

$$\begin{cases} k_2 - 3k_1 = 0 \\ 2k_1 - k_3 = 0 \\ k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 3k_1 \\ 2k_1 = k_3 \\ k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}$$

$$k_2 + 2k_3 = 0 \Rightarrow 3k_1 + 4k_1 = 0 \Rightarrow 7k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$$

$$\text{Άρα } k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

Συνεπώς δεν υπάρχει επιλογή σταθερών  $k_1, k_2, k_3$  που να μην είναι όλες μηδενικές. Άρα οι δοθείσες αλγεβρές δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένες. Είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

ΟΕΛΙΔΑ 195 άσκηση 16

$$y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

Πρώτη λύουμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση  $y'' + 4y = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι  $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 2i$  και  $r_2 = -2i$

Άρα  $y_{\text{ομ}} = C_1 e^{0} \cos(2t) + C_2 e^0 \sin(2t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{\text{ομ}} = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Μετά βρίσκουμε μια ειδική λύση της εξίσωσης

$$y_{\text{ΕΜΟ}} = At^2 + Bt + C + De^t$$

$$\text{έχουμε } y'_{\text{ΕΜΟ}} = 2At + B + De^t \quad \text{και} \quad y''_{\text{ΕΜΟ}} = 2A + De^t$$

Εισάγουμε τις εκφράσεις των  $y_{\text{ΕΜΟ}}, y'_{\text{ΕΜΟ}}, y''_{\text{ΕΜΟ}}$  στην αρχική εξίσωση:

$$2A + De^t + 4(At^2 + Bt + C + De^t) = t^2 + 3e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A + De^t + 4At^2 + 4Bt + 4C + 4De^t - t^2 - 3e^t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5D - 3)e^t + (4A - 1)t^2 + (4B)t + (2A + 4C) = 0$$

$$\text{Πρέπει: } 5D - 3 = 0 \Rightarrow D = 3/5$$

$$4A - 1 = 0 \Rightarrow A = 1/4$$

$$4B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$2A + 4C = 0 \Rightarrow C = -1/8$$

$$\text{Άρα } y_{\text{ΕΜΟ}} = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^t$$

$$\text{Οπότε } y = y_{\text{ομ}} + y_{\text{ΕΜΟ}} = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^t$$

$$y' = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t) + \frac{1}{2}t + \frac{3}{5}e^t$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{19}{40}$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow 2C_2 + \frac{3}{5} = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{7}{10}$$

$$\text{Άρα } y = -\frac{19}{40} \cos(2t) + \frac{7}{10} \sin(2t) + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^t$$

$$f(t) = t^2|t|, \quad g(t) = t^3$$

α) •  $0 < t < L$  :  $f(t) = t^3$  και  $g(t) = t^3$

Σχηματίζουμε τον γραμμικό συνδυασμό

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = k_1 t^3 + k_2 t^3 = (k_1 + k_2) t^3$$

Τον εξισώνουμε με το μηδέν και έχουμε:

$$(k_1 + k_2) t^3 = 0 \Rightarrow k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = -k_2$$

Άρα οι  $f, g$  είναι γραμμικώς εξαρτημένες

•  $-1 < t < 0$  :  $f(t) = -t^3$  και  $g(t) = t^3$

Σχηματίζουμε τον γραμμ. συνδ.  $k_1 f(t) + k_2 g(t) = k_1 (-t^3) + k_2 t^3 = (k_2 - k_1) t^3$

Τον εξισώνουμε με το μηδέν  $(k_2 - k_1) t^3 = 0 \Rightarrow k_2 = k_1$

Άρα οι  $f, g$  είναι γραμμικώς εξαρτημένες

β) •  $-1 < t < 1$   $f(t) = t^2|t|, \quad g(t) = t^3$

Σύμφωνα με το (α) ερώτημα θα πρέπει να ισχύει

$$k_1 = -k_2 \text{ και } k_2 = k_1$$

$$\text{Άρα } k_1 = k_2 = 0$$

Συνεπώς δεν υπάρχει επιλογή σταθερών που να μην είναι όλες μηδενικές. Άρα οι δοθείσες συναρτήσεις δεν είναι γραμμικώς

εξαρτημένες. Είναι γραμμικώς ανεξάρτητες

β) Έξοψη το  $-1 < t < 1$

$$\begin{array}{l} \text{Για } -1 < t < 0: f(t) = -t^3 \text{ και } g(t) = t^3 \\ \text{Άρα } f'(t) = -3t^2 \text{ και } g'(t) = 3t^2 \end{array}$$

Οπότε για την επίλυση Wronski:

$$W(f, g)(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t^3 & t^3 \\ -3t^2 & 3t^2 \end{vmatrix} = -3t^6 + 3t^6 = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Για } 0 < t < 1: f(t) = t^3 \text{ και } g(t) = t^3 \\ \text{Άρα } f'(t) = 3t^2 \text{ και } g'(t) = 3t^2 \end{array}$$

Οπότε για την επίλυση Wronski:

$$W(f, g)(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^3 & t^3 \\ 3t^2 & 3t^2 \end{vmatrix} = 3t^6 - 3t^6 = 0$$

Για  $t=0$

$$W(f, g)(t) = 0$$

Οπότε σε κάθε περίπτωση

$$W(f, g)(t) = 0 \quad \forall t \in (-1, 1)$$

$$t^2 y'' - 4t y' + 6y = 0, t > 0 \quad y_1(t) = t^2$$

Θέτουμε  $y = u(t) y_1 = u(t) \cdot t^2$

οπότε  $y' = u'(t) \cdot t^2 + u(t) \cdot 2t$

$$y'' = u''(t) \cdot t^2 + u'(t) \cdot 2t + u'(t) \cdot 2t + 2u(t) = u''(t) \cdot t^2 + u'(t) \cdot 4t + 2u(t)$$

Εισάγοντας τις παραπάνω εκφράσεις των  $y, y', y''$  στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$$t^2(u''(t)t^2 + u'(t)4t + 2u(t)) - 4t(u'(t)t^2 + u(t)2t) + 6u(t)t^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u''(t)t^4 + u'(t)4t^3 + u(t)2t^2 - u'(t)4t^3 - u(t)8t^2 + u(t)6t^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u''(t)t^4 = 0 \quad \Rightarrow u''(t) = 0 \quad \Rightarrow u'(t) = C_1 \Rightarrow u(t) = C_1 t + C_2$$

Άρα έπεται ότι:

$$y = (C_1 t + C_2) t^2 = C_1 t^3 + C_2 t^2 \quad \text{όπου } C_1 \text{ και } C_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}$$

Αν θέσουμε  $C_1 = 0$  και  $C_2 = 1$  τότε  $y_1(t) = t^2$  που είναι η δοθείσα λύση

Αν θέσουμε  $C_1 = 1$  και  $C_2 = 0$  τότε  $y_2(t) = t^3$  που είναι μια δεύτερη λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0$$

a)  $a > 0, c > 0$  και  $b = 0$

$$ay'' + cy = 0$$

έχουμε την χαρακτηριστική εξίσωση  $ar^2 + c = 0$

$$ar^2 = -c \Rightarrow r^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow r^2 = i^2 \frac{c}{a}$$

έχουμε τις ρίζες  $r_1 = i\sqrt{\frac{c}{a}}$  και  $r_2 = -i\sqrt{\frac{c}{a}}$

Έτσι, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y = C_1 e^{0t} \cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) + C_2 e^{0t} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) \Rightarrow$$

$$y = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right)$$

Έτσι, λύση της  $y$  παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει εκθετικός όρος. Υπάρχουν μόνο ταξινομημένοι όροι. Άρα η  $y$  είναι γραμμένη καθώς  $t \rightarrow \infty$

b)  $a > 0, b > 0$  και  $c = 0$

$$ay'' + by' = 0$$

έχουμε την χαρακτηριστική εξίσωση  $ar^2 + br = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r(ar + b) = 0$$

έχουμε τις ρίζες  $r_1 = 0$  και  $r_2 = \frac{-b}{a}$

Έτσι, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y = C_1 e^{0t} + C_2 e^{\frac{-b}{a}t} \Rightarrow y = C_1 + C_2 e^{\frac{-b}{a}t}$$

ισχύει ότι  $y(0) = y_0 \Rightarrow C_1 + C_2 = y_0$  (1)

$y'(0) = y'_0 \Rightarrow \frac{-b}{a} C_2 = y'_0 \Rightarrow C_2 = \frac{-ay'_0}{b}$  (2)

(1)  $\Rightarrow C_1 = y_0 - C_2 = y_0 + ay'_0/b$  (3)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( C_1 + C_2 e^{\frac{-b}{a}t} \right) = C_1 \stackrel{(3)}{=} y_0 + y'_0 \frac{a}{b}$$

σελίδα 201 άσκηση 14

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, t > 0 \quad y_1(t) = t, \quad y_2(t) = t \cdot e^t$$

Έχουμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$$

Έχουμε  $y_1'(t) = 1, y_1''(t) = 0, y_2'(t) = e^t(1+t), y_2''(t) = e^t(2+t)$

Εξετάζουμε αν οι  $y_1, y_2$  ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση

•  $t^2 y_1'' - t(t+2)y_1' + (t+2)y_1 = 0 - t(t+2) + (t+2)t = 0$

•  $t^2 y_2'' - t(t+2)y_2' + (t+2)y_2 = t^2 \cdot e^t(2+t) - t(t+2)e^t(1+t) + (t+2)t \cdot e^t = e^t(2t^2 + t^3) - e^t(t^3 + 3t^2 + 2t) + e^t(t^2 + 2t) = 0$

Άρα πράγματι οι συναρτήσεις  $y_1, y_2$  ικανοποιούν την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

Βρίσκουμε μια ειδική λύση της δεδομένης μη ομογενούς εξίσωσης υπολογίζουμε

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} t & t \cdot e^t \\ 1 & (t+1)e^t \end{vmatrix} = e^t(t^2 + t) - e^t \cdot t = e^t \cdot t^2$$

$$Y_{EHO} = -y_1(t) \int \frac{y_2(t) \cdot g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} \cdot dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t) \cdot g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} \cdot dt =$$

$$= -t \int \frac{t \cdot e^t \cdot 2t}{e^t t^2} \cdot dt + t \cdot e^t \int \frac{t \cdot 2 \cdot t}{e^t t^2} \cdot dt =$$

$$= -t \int 2 dt + t \cdot e^t \int 2 e^{-t} \cdot dt = -2t^2 + t \cdot e^t (-1) e^{-t} \cdot 2 =$$

$$= -2t^2 - 2t$$

Το  $-2t$  είναι πολλαπλασιαστικό άρα για ημετέρας λύση

Άρα  $Y_{EHO} = -2t^2$

$$(3) \Rightarrow w(y_1, y_2)(t_0) = \frac{-q(t_0)y_1(t_0)y_2(t_0)}{p(t_0)} + \frac{q(t_0)y_1(t_0)y_2(t_0)}{p(t_0)} = 0$$

Άρα οι  $y_1$  και  $y_2$  δεν σχηματίζουν θεμελιώδες σύνολο λύσεων

• Αν  $p(t_0) = 0$  και  $q(t_0) = 0$  τότε

$$(3) \Rightarrow w(y_1, y_2)(t_0) = C e^0 = C \quad (\text{Από Θεώρημα Abel})$$

όπου  $C$  μια σταθερά εξαρτώμενη από τα  $y_1$  και  $y_2$

Άρα αν αμφότερες οι  $p$  και  $q$  μηδενίζονται στο  $t_0$ , οι  $y_1$  και  $y_2$  μπορεί να σχηματίζουν θεμελιώδες σύνολο λύσεων

οβλίστα 257 ασκήση 14

$$y''' - y'' + y' - y = g(t)$$

Λύουμε την ομογενή εξίσωση

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0$$

Horner για να βρούμε τις ρίζες:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \downarrow & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

οπότε  $(r-1)(r^2+1)=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=-i, r_3=i$

οπότε  $y_{OM} = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$

Εξάγουμε:  $w(t) = w(e^t, \cos t, \sin t) = \begin{vmatrix} e^t & \cos t & \sin t \\ e^t & -\sin t & \cos t \\ e^t & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} =$

$$= e^t \begin{vmatrix} 1 & \cos t & \sin t \\ 1 & -\sin t & \cos t \\ 1 & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = e^t \left[ \sin^2 t + \cos^2 t + \cancel{-\sin t \cos t} + \cancel{\sin t \cos t} + \cos^2 t + \sin^2 t \right]$$

$$= 2e^t$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 1 & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & \sin t \\ e^t & 0 & \cos t \\ e^t & 1 & -\sin t \end{vmatrix} = e^t \cos t - e^t \sin t$$

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & \cos t & 0 \\ e^t & -\sin t & 0 \\ e^t & -\cos t & 1 \end{vmatrix} = -e^t \sin t - e^t \cos t$$

$$Y_{EMO} = e^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2e^s} \cdot ds + \cos t \int_{t_0}^t \frac{e^s \cos s - e^s \sin s}{2e^s} \cdot ds + \sin t \int_{t_0}^t \frac{-e^s \sin s - e^s \cos s}{2e^s} \cdot ds$$

$$= \frac{e^t}{2} \int_{t_0}^t e^{-s} ds + \frac{\cos t}{2} \int_{t_0}^t (\cos s - \sin s) ds - \frac{\sin t}{2} \int_{t_0}^t (\sin s + \cos s) ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{t-s} \cdot ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (\cos t \cos s - \sin t \cos s - \sin t \sin s - \cos t \sin s) ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{t-s} ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [-\sin(t-s) - \cos(t-s)] \cdot ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [e^{t-s} - \sin(t-s) - \cos(t-s)] \cdot ds$$

σελίδα 257 άσκηση 16

Έχουμε την διαφορική εξίσωση  $y''' - 3y'' + 3y' - y = g(t)$   
•  $g(t) = t^2 e^t$

Βρίσκουμε λύση της ομογενούς εξίσωσης  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$   
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι  $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$

Εφαρμόζουμε οτιδήποτε Horner

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ \downarrow & 1 & -2 & 1 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \end{array}$$

αρα έχουμε  $(r-1)(r^2 - 2r + 1) = (r-1)(r-1)^2 = (r-1)^3$

Αρα  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$  και οι ρίζες  
 $y_{01} = C_1 e^t + C_2 t \cdot e^t + C_3 t^2 \cdot e^t$

Αρα  $y_1(t) = e^t, y_2(t) = t e^t, y_3(t) = t^2 e^t$  και λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.  
Υπολογίζουμε

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & t e^t & t^2 e^t \\ e^t & (t+1)e^t & (t^2+2t)e^t \\ e^t & (t+2)e^t & (t^2+4t+2)e^t \end{vmatrix} = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 1 & t+1 & t^2+2t \\ 1 & t+2 & t^2+4t+2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^t \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 2 & 4t+2 \end{vmatrix} = e^t (4t+2 - 4t) = 2e^t$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & t e^t & t^2 e^t \\ 0 & (t+1)e^t & (t^2+2t)e^t \\ 1 & (t+2)e^t & (t^2+4t+2)e^t \end{vmatrix} = e^{2t} (t^3+2t^2) - e^{2t} (t^3+t^2) =$$

$$= e^{2t} \cdot t^2$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & t^2 e^t \\ e^t & 0 & (t^2+2t)e^t \\ e^t & 1 & (t^2+4t+2)e^t \end{vmatrix} = -[e^{2t}(t^2+2t) - e^{2t}t^2] = e^{2t}(-2t)$$

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & t e^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{vmatrix} = e^{2t}(t+1) - e^{2t}t = e^{2t}$$

Συμπληρώστε με τα αποτελέσματα αυτά έχουμε:

$$Y_{EMD} = e^t \int_{t_0}^t \frac{g(s) \cdot e^{2s} \cdot s^2}{2e^{2s}} ds + t \cdot e^t \int_{t_0}^t \frac{g(s) \cdot e^{2s} \cdot (-2s)}{2e^{2s}} ds + t^2 \cdot e^t \int_{t_0}^t \frac{g(s) \cdot e^{2s}}{2e^{2s}} ds$$

$$\Rightarrow Y_{EMD} = \int_{t_0}^t \left[ \frac{e^t \cdot g(s) \cdot s^2}{2 \cdot e^s} + \frac{t \cdot e^t \cdot g(s) \cdot (-2s)}{2e^s} + \frac{e^t \cdot t^2 \cdot g(s)}{2e^s} \right] ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{EMD} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (s^2 - 2st + t^2) \cdot e^{(t-s)} \cdot g(s) \cdot ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{EMD} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (s-t)^2 e^{(t-s)} g(s) \cdot ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{EMD} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (s-t)^2 e^{(t-s)} \cdot s^{-2} e^s ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{EMD} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (s-t)^2 \cdot s^{-2} \cdot e^t ds$$

σελίδα 257 άσκηση 17

Έχουμε την διαφορική εξίσωση  $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = g(x)$ ,  $x > 0$   
 Εξετάζουμε αν τα  $x, x^2, x^3$  είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης  
 Έχουμε την ομογενή εξίσωση:  $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$  (I)

Έστω  $y_1(x) = x$ ,  $y_1'(x) = 1$ ,  $y_1''(x) = 0$ ,  $y_1'''(x) = 0$   
 Αντικαθιστούμε τα  $y_1, y_1', y_1'', y_1'''$  στην (I)  
 $x^3 \cdot 0 - 3x^2 \cdot 0 + 6x \cdot 1 - 6x = 0$

Έστω  $y_2(x) = x^2$ ,  $y_2'(x) = 2x$ ,  $y_2''(x) = 2$ ,  $y_2'''(x) = 0$   
 Αντικαθιστούμε τα  $y_2, y_2', y_2'', y_2'''$  στην (I)  
 $x^3 \cdot 0 - 3x^2 \cdot 2 + 6x \cdot 2x - 6x^2 = -6x^2 + 12x^2 - 6x^2 = 0 \cdot x^2 = 0$

Έστω  $y_3(x) = x^3$ ,  $y_3'(x) = 3x^2$ ,  $y_3''(x) = 6x$ ,  $y_3'''(x) = 6$   
 Αντικαθιστούμε τα  $y_3, y_3', y_3'', y_3'''$  στην (I)  
 $x^3 \cdot 6 - 3x^2 \cdot 6x + 6x \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 6 = 6x^3 - 18x^3 + 18x^3 - 6x^3 = 0 \cdot x^3 = 0$

Άρα τα  $x, x^2, x^3$  είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

Από  $x > 0$  η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{x^3 \cdot y'''}{x^3} - \frac{3x^2 y''}{x^3} + \frac{6xy'}{x^3} - \frac{6y}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \Rightarrow y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = \frac{g(x)}{x^3}$$

Έχουμε

$$W(x) = W(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x(12x^2 - 6x^2) - 1(6x^3 - 2x^3) = 6x^3 - 4x^3 = 2x^3$$

Αρα  $W(x) = 2x^3$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -(3x^3 - x^3) = -2x^3$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$$

$$Y_{EMD} = x \int_{x_0}^x \frac{g(s) s^4}{s^3 \cdot 2s^3} ds + x^2 \int_{x_0}^x \frac{-g(s) \cdot 2s^3}{s^3 \cdot 2s^3} ds + x^3 \int_{x_0}^x \frac{g(s) \cdot s^2}{s^3 \cdot 2 \cdot s^3} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{EMD} = x \int_{x_0}^x \frac{g(s)}{2 \cdot s^2} ds + x^2 \int_{x_0}^x \frac{-g(s)}{s^3} ds + x^3 \int_{x_0}^x \frac{g(s)}{2s^4} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{EMD} = \frac{1}{2} \left[ \int_{x_0}^x \frac{g(s) \cdot x}{s^2} ds + \int_{x_0}^x \frac{-2 \cdot g(s) \cdot x^2}{s^3} ds + \int_{x_0}^x \frac{x^3 g(s)}{s^4} ds \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{EMD} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left[ \frac{x}{s^2} - \frac{2x^2}{s^3} + \frac{x^3}{s^4} \right] g(s) \cdot ds$$

σελίδα 252 άσκηση 17

$$y^{(4)} - y''' - y'' + y' = t^2 + 4 + t \sin t$$

Χαρακτηριστική εξίσωση ομογενούς  $r^4 - r^3 - r^2 + r = 0$

Χωρίζουμε σε  $h_1(t) = t^2 + 4$  και  $h_2(t) = t \sin t$

Για την  $h_1(t)$ :  $y_{1EMO} = A_3 t^3 + A_2 t^2 + A_1 t + A_0$

Για την  $h_2(t)$ :  $y_{2EMO} = t^s \cdot e^0 [\cos t (B_1 t + B_0) + \sin t (C_1 t + C_0)]$

Παρατηρούμε ότι το  $\xi = i$  δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Άρα  $s = 0$

Οπότε έχουμε  $y_{2EMO} = \cos t (B_1 t + B_0) + \sin t (C_1 t + C_0)$

Τελικά  $y_{EMO} = y_{1EMO} + y_{2EMO} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{EMO} = A_3 t^3 + A_2 t^2 + A_1 t + A_0 + \cos t (B_1 t + B_0) + \sin t (C_1 t + C_0)$$

σελίδα 252 άσκηση 18

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 3e^t + 2te^{-t} + e^{-t} \sin t$$

Χαρακτηριστική εξίσωση  $r^4 + 2r^3 + 2r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2 + 2r + 2) = 0$

Χωρίζουμε σε  $h_1(t) = 3e^t$ ,  $h_2(t) = 2te^{-t}$  και  $h_3(t) = e^{-t} \sin t$

$r_{1,2} = 0$  (διπλά)  
 $r_3 = -1 + i$   
 $r_4 = -1 - i$

Για την  $h_1(t)$ :  $y_{1EMD} = Ae^t$

$$\begin{aligned} \text{Για την } h_2(t): y_{2EMD} &= t^{s_2} e^{-t} [\cos \theta \cdot (B_1 t + B_0) + \sin \theta \cdot (C_1 t + C_0)] = \\ &= t^{s_2} e^{-t} (B_1 t + B_0) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο  $w = -1$  δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Άρα  $s_2 = 0$

$$\text{Οπότε } y_{2EMD} = e^{-t} (B_1 t + B_0)$$

$$\text{Για την } h_3(t): y_{3EMD} = t^{s_3} e^{-t} [D \cos t + E \sin t]$$

Παρατηρούμε ότι ο  $v = -1 + i$  είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης με πολλαπλότητα 1. Άρα  $s_3 = 1$

$$\text{Οπότε } y_{3EMD} = t \cdot e^{-t} [D \cos t + E \sin t]$$

$$\text{Τέλος } y_{EMD} = y_{1EMD} + y_{2EMD} + y_{3EMD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{EMD} = Ae^t + e^{-t} (B_1 t + B_0) + t \cdot e^{-t} [D \cos t + E \sin t]$$

σελίδα 166 άσκηση 45

Έχουμε την εξίσωση  $x^2 y'' + xy' - y = 0$ ,  $x > 0$

Έχει την μορφή  $P(x) \cdot y'' + Q(x) \cdot y' + R(x) \cdot y = 0$

με  $P(x) = x^2$ ,  $Q(x) = x$  και  $R(x) = -1$

Υπολογίζουμε  $P'(x) = 2x$ ,  $Q'(x) = 1$  και  $P''(x) = 2$

Για να είναι ακριβής μια εξίσωση αυτής της μορφής θα πρέπει

$$P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$$

Για την συγκεκριμένη εξίσωση  $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 2 - 1 - 1 = 0$

Άρα η δοθείσα εξίσωση είναι ακριβής

$$\text{Έχουμε } x^2 y'' + xy' - y = 0 \Rightarrow x^2 y'' + 2xy' - xy' - y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 \cdot y')' + (-xy)' = 0 \Rightarrow x^2 \cdot y' + (-xy) = C \quad (1)$$

Ισχύει ότι  $x > 0$ , οπότε μεταφέραμε την διαφορική εξίσωση (1) στην καθιερωμένη μορφή διαφύλαξης δια  $x^2$  και προκύπτει

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{C}{x^2} \quad (2)$$

Έτσι  $p(x) = -\frac{1}{x}$  και ο ολοκλήρωσας παράγοντας

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (2) με  $\mu(x)$  και έχουμε:

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{C}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x} y' + \left(\frac{1}{x}\right)' y = \left(\frac{-C}{2x^2}\right)' \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \left(\frac{-C}{2x^2}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{-C}{2x^2} + C_1$$

Επομένως ακριβώς  $x > 0$  προκύπτει η λύση  $y = \frac{-C}{2x} + C_1 \cdot x$ ,  $x > 0$

2° ΜΕΡΟΣ ΓΚΙΝΤΙΑΜΕ