

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 15/09/2017

**Θέμα 1.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0,0) = 0$  και  $f(x,y) = \frac{2x^3 - 3y^3}{x^2 + y^2}$  αν  $(x,y) \neq (0,0)$ .

- (i) Δείξτε ότι η  $f$  δεν είναι διαφορίσιμη στο  $(0,0)$ . (1,5 μον)
- (ii) Αν  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου, να βρεθεί η παράγωγος της  $f$  στο  $(0,0)$  κατά την κατεύθυνση  $\vec{v}$ . (1 μον)

**ΘΕΜΑ 2.** (β) Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x,y) = e^{3x+5y}$ .

(i) Δείξτε ότι η  $f$  διαφορίσιμη και βρείτε πολυώνυμο 1ου βαθμού  $P_1(x,y)$  τέτοιο ώστε  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{3x+5y} - P_1(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ . (1 μον)

(iii) Βρείτε πολυώνυμο 2ου βαθμού  $P_2(x,y)$  τέτοιο ώστε  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{3x+5y} - P_2(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$ . (1,5 μον)

**Θέμα 3.** (i) Έστω  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμη και  $\vec{r}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  λεία καμπύλη. Αν  $F(\vec{r}(0)) = F(\vec{r}(1))$  δείξτε ότι υπάρχει  $\xi \in (0,1)$  με  $\nabla F(\vec{r}(\xi)) \perp \vec{r}'(\xi)$ . (1 μον)

(ii) Δίνεται η συνάρτηση  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $F(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ . Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατά της  $F$ . (1,5 μον)

**Θέμα 4.** Δίνεται η συνάρτηση  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $F(x,y,z) = z^3 + z + 2x^2 + 2y^2$ .

(i) Δείξτε ότι η  $F$  είναι κλάσης  $C^2$  και ότι η εξίσωση  $F(x,y,z) = 0$  ορίζει μια μοναδική συνάρτηση  $z = z(x,y): U \rightarrow \mathbb{R}$  σε μια περιοχή  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  του σημείου  $(0,0)$  με  $z(0,0) = 0$ . (0,5 μον)

(ii) Δείξτε ότι το  $(0,0)$  είναι τοπικό ακρότατο της  $z = z(x,y)$  και προσδιορίστε το είδος του. (1 μον)

(iii) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor της  $z = z(x,y)$  δεύτερης τάξης στο  $(0,0)$  και υπολογίστε το όριο  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x,y)}{x^2 + y^2}$ . (1 μον)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2,5 ΩΡΕΣ