

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α Ι Ι

8 Σεπτεμβρίου 2014

Απαντήστε και στα τρία ισοδύναμα θέματα.
Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

(α) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και έστω X ένα πεπερασμένο G -σύνολο. Έστω καμία $X_g = \{x \in X \mid gx = x\}$, για $g \in G$, και s το πλήθος των τροχιών του X υπό την G . Δείξτε ότι:

$$s \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|,$$

όπου $X_g = \{x \in X \mid gx = x\}$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε N το πλήθος των ζευγών (g, x) ώστε $gx = x$ και αναλύστε το N με δύο διαφορετικούς τρόπους.)

(β) Χρησιμοποιώντας το α) βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο όταν διατίθενται ξύλινες, πλαστικές ή μεταλλικές πλευρές και επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε για την κάθε πλευρά οποιοδήποτε από τα τρία υλικά.

✓) Έστω G τυχία πεπερασμένη ομάδα τάξης n . Διατυπώσατε ένα μερικό αντίστροφο του Θεωρήματος Lagrange.

✓ ΘΕΜΑ 2ο

✓) Διατυπώσατε το Κριτήριο Eisenstein σχετικά με την αναγωγιμότητα πάνω από το \mathbb{Q} πολυωνύμου στον $\mathbb{Z}[x]$. Στη συνέχεια εφαρμόσατε το στο πολυώνυμο $x^3 - 12x^2 - 36x + 18$.

β) Δώσατε τον ορισμό του μέγιστου ιδεώδους για έναν δακτύλιο R .

✓) Έστω F σώμα. Δείξτε ότι αν ένα ιδεώδες $(p(x)) \neq \{0\}$ του $F[x]$ είναι μέγιστο τότε το $p(x)$ είναι ανάγωγο πάνω από το F . (\Rightarrow)

β) Εξετάσατε εάν ο δακτύλιος - πηλίκο $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^3 - 12x^2 - 36x + 18 \rangle}$ είναι σώμα. Δικαιολογήσατε την απάντησή σας.

✓ ΘΕΜΑ 3ο

α) Έστω F σώμα και έστω E επέκταση του F . Έστω ακόμα $\alpha \in E$ και έστω ϕ_α ο ομομορφισμός εκτίμησης του $F[x]$ στο E , που ορίζεται μέσω των $\phi_\alpha(a) = a$, αν $a \in F$, και $\phi_\alpha(x) = \alpha$. Δείξτε ότι το α είναι υπερβατικό πάνω από το F αν και μόνον αν ο ϕ_α είναι ένα-προς-ένα, δηλαδή ορίζει έναν ισομορφισμό του $F[x]$ με μία υποπεριοχή $F[\alpha]$ του E .

β) Έστω $\alpha \in E$ υπερβατικό πάνω από το F . Δώσατε την μορφή των στοιχείων της επέκτασης $F(\alpha)$ του F και δείξτε ότι κάθε στοιχείο του $F(\alpha)$ που δεν ανήκει στο F είναι επίσης υπερβατικό.

γ) Έστω α κατασκευάσιμος αριθμός. Κατασκευάσατε τον αριθμό $\sqrt{\alpha}$ με κανόνα και διαβήτη.

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου