

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α Κ Α Ι Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Ε Σ

8 Ιανουαρίου 2016

Απαντήστε και στα τρία ισοδύναμα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.

ΘΕΜΑ 1ο

- (I) α) Δείξτε ότι η ομάδα \mathbb{Z}_{45} περιέχει ακριβώς μία υποομάδα τάξης 3 και δώστε την.
 β) Κατασκευάστε έναν μη τετριμμένο ομομορφισμό από την ομάδα \mathbb{Z}_{15} στην \mathbb{Z}_{45} .
 (II) α) Διατυπώσατε το Θεώρημα Ταξινόμησης Πεπερασμένων Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων.
 β) Δώστε όλες τις μη ισομορφικές αβελιανές ομάδες τάξης 225 σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα και στη συνέχεια συμπτύξτε τις κατά το δυνατόν. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
 γ) Ταυτοποιήστε την ομάδα-πηλίκο $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{5\mathbb{Z} \times 45\mathbb{Z}}$ στη λίστα που δώσατε στο ερώτημα β).
 δ) Για δύο από τις ομάδες του υποερωτήματος β) δείξτε ότι δεν είναι ισομορφικές.

*ομάδες τάξης 225
d S_3 x C_3*

ΘΕΜΑ 2ο

- (I) α) Έστω G ομάδα. Η υποομάδα $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \forall g \in G\}$ λέγεται κέντρο της G . Δείξτε ότι η $Z(G)$ είναι κανονική υποομάδα της G . *δείξια συμμ ε α β ι ο ι σ τ α*
 β) Βρείτε το κέντρο της διεδρικής ομάδας D_3 . *1 5 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12*
 γ) Δείξτε ότι οι ομάδες D_3 και S_3 είναι ισομορφικές. Από το (β) συνάγετε το κέντρο της S_3 .
 δ) Δείξτε ότι για κάθε $n > 2$ το κέντρο $Z(S_n)$ της ομάδας μεταθέσεων S_n περιέχει μόνο την ταυτοτική μετάθεση.
 (II) α) Δείξτε ότι σε μία αβελιανή ομάδα G το σύνολο T των στοιχείων της με πεπερασμένη τάξη είναι υποομάδα της G (η υποομάδα στρέψης - torsion subgroup).
 β) Εξετάσατε εάν η T είναι κανονική υποομάδα της G .

αβ = βα

ΘΕΜΑ 3ο

- (I) α) Έστω $a \in \mathbb{Z}$ και έστω $p \in \mathbb{N}$ πρώτος που δεν διαιρεί τον a . Δείξτε ότι ο $a^{p-1} - 1$ διαιρείται από τον p .
 β) Δείξτε ότι ο 11 δεν διαιρεί τον αριθμό $3^{11211} - 1$.
 (II) α) Έστω X σύνολο και έστω G ομάδα που δρα πάνω στο X . Δώστε τον ορισμό της δράσης της G πάνω στο X . Έστω επιπλέον $x \in X$. Δώστε τον ορισμό της υποομάδας ισοτροπίας του x , G_x , και δείξτε ότι η G_x είναι πράγματι υποομάδα της G . *200 μμμ*
 β) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και έστω X ένα πεπερασμένο G -σύνολο. Ερμηνεύσατε τα στοιχεία του τύπου: $s \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|$.
 γ) Χρησιμοποιώντας το β) βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να χρωματιστούν οι πλευρές ενός ισοπλευρού τριγώνου όταν διατίθενται 5 διαφορετικά χρώματα και επιτρέπεται να χρωματίζονται διαφορετικές πλευρές με το ίδιο χρώμα.

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου

ωι' αωι'

	1	3	6	18	11	33
2	6	7	21	19	36	
3	9	8	24	13	39	
11	19	0	27	14	48	

*200 μμμ
225 / 15 = 15
45 / 3 = 15*