

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α Ι Ι

Αθήνα 21 Σεπτεμβρίου 2017

Απαντήστε και στα 3 θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.

✓ ΘΕΜΑ 1ο

Έστω  $G$  μία ομάδα τάξης 40.

α) Δείξτε ότι η  $G$  έχει ένα στοιχείο  $a$  τέτοιο ώστε  $a^{-1} = a^4$ .

β) Δείξτε ότι η  $G$  έχει υποομάδες τάξης 4 και 8.

γ) Δείξτε ότι η υποομάδα τάξης 8 είναι μοναδική και κανονική.

Σε όλες τις απαντήσεις σας παραθέσατε τα θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιήσατε.  
(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

α) Διατυπώσατε το Κριτήριο Eisenstein σχετικά με την αναγωγιμότητα πάνω από το  $\mathbb{Q}$  ενός πολυώνυμου στον  $\mathbb{Z}[x]$ .

β) Εφαρμόσατε το Κριτήριο Eisenstein στο πολυώνυμο  $x^3 - 12x^2 + 36x + 18$ .

γ) Έστω  $F$  σώμα. Δείξτε ότι αν ένα ιδεώδες  $(p(x)) \neq \{0\}$  του  $F[x]$  είναι μέγιστο τότε το  $p(x)$  είναι ανάγωγο πάνω από το  $F$ . Στη συνέχεια εξετάστε εάν ο δοκτύλιος

- πηλίκο  $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^3 - 12x^2 + 36x + 18 \rangle}$  είναι σώμα. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.  
(3 μονάδες)

✓ ΘΕΜΑ 3ο

α) Δείξτε ότι ο πραγματικός αριθμός  $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{5}}$  είναι αλγεβρικός πάνω από το  $\mathbb{Q}$  και βρείτε το ανάγωγο πολυώνυμο  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ .

β) Βρείτε την μικρότερη δυνατή επέκταση  $E$  του σώματος  $\mathbb{Q}$  έτσι ώστε  $\alpha \in E$ . Στη συνέχεια βρείτε την διάσταση του  $E$  ως γραμμικού χώρου πάνω από το  $\mathbb{Q}$ .

γ) Κατασκευάσατε το αριθμό  $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{5}}$  με κανόνα και διαβήτη.

δ) Εξηγήσατε γιατί είναι αδύνατη η τριχοτόμηση της γωνίας με κανόνα και διαβήτη.  
(4 μονάδες)

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου