

Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές (2o εξάμ.) – 1o Φυλλάδιο Ασκήσεων

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών, Ε.Μ.Π.

Απρίλιος 2016

Λύσεις Ασκήσεων 1–8

1. Τι συμπεραίνετε για έναν τετραγωνικό πίνακα A αν γνωρίζετε ότι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^4(\lambda - 2)^3$ και ότι ισχύει $(A - 2I)(A - 3I)^2 = O$;

Λύση: Ο A είναι ένας 7×7 αντιστρέψιμος πίνακας με ορίζουσα $\det(A) = 3^4 \cdot 2^3 = 648 (\neq 0)$ και ίχνος $\text{trace}(A) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 18$. Έχει ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$ (οπότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος), ή $m_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2)$ (οπότε ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος).

2. Εάν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ είναι οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ αντιστρέψιμου πίνακα A , βρείτε τις ιδιοτιμές του $\text{adj}(A)$.

Λύση: Έχει αποδειχθεί στην τάξη ότι οι ιδιοτιμές του $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ είναι $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_\nu}$ (διότι $Ax_i = \lambda_i x_i \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda_i} x_i = A^{-1} x_i$). Επομένως, οι ιδιοτιμές του $\text{adj}(A) = \det(A) A^{-1}$ είναι $\frac{\det(A)}{\lambda_1}, \frac{\det(A)}{\lambda_2}, \dots, \frac{\det(A)}{\lambda_\nu}$.

3. Κατασκευάστε (αν υπάρχει) μια διαγωνοποίηση με μετασχηματισμό ομοιότητας του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Έπειτα, βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα A^5 και υπολογίστε τον A^5 με εφαρμογή του Θεωρήματος Cayley-Hamilton.

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Επομένως, ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αφού έχει τρεις απλές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = -1$. Λύνοντας τα συστήματα $(A - 3I)X = O$, $(A - 1I)X = O$ και $(A - (-1)I)X = O$, βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα-αντιπροσώπους $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Άρα

έχουμε τη διαγωνοποίηση $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$. Συνεπώς, μια

διαγωνοποίηση του A^5 είναι $A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$. Τέλος,

από το Θεώρημα Cayley-Hamilton, έχουμε $A^3 - 3A^2 - A + 3I = O \Rightarrow A^3 = 3A^2 + A - 3I \Rightarrow \Rightarrow A^4 = 3A^3 + A^2 - 3A = 10A^2 - 9I$. Επομένως, $A^5 = 10A^3 - 9A = 30A^2 + A - 30I = \begin{bmatrix} 121 & 121 & 122 \\ 0 & 1 & 0 \\ 122 & 121 & 121 \end{bmatrix}$.

4. Κατασκευάστε (αν υπάρχει) μια διαγωνοποίηση με μετασχηματισμό ομοιότητας του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 8 & -9 & 4 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Έπειτα, αποδείξτε ότι ο A ικανοποιεί τη σχέση $A^{2k} + A^{2k-1} - A = I$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 8 & -4 \\ -8 & \lambda + 9 & -4 \\ -4 & 4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$. Επομένως, ο A έχει μια απλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ και μια διπλή ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Λύνοντας τα συστήματα $(A - 1I)X = O$ και $(A - (-1)I)X = O$, βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα-αντιπροσώπους $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ για την απλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ και $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ για τη διπλή ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Άρα ο πίνακας A διαγωνοποιείται με τον ακόλουθο μετασχηματισμό ομοιότητας:

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1}. \text{ Οι ιδιοτιμές του } A \text{ ικανοποιούν τη σχέση}$$

$\lambda^{2k} + \lambda^{2k-1} - \lambda = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα, ο διαγώνιος πίνακας D ικανοποιεί τη σχέση $D^{2k} + D^{2k-1} - D = I$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τελικά, λόγω της σχέσης ομοιότητας, και ο A ικανοποιεί τη σχέση $A^{2k} + A^{2k-1} - A = (PDP^{-1})^{2k} + (PDP^{-1})^{2k-1} - PDP^{-1} = P(D^{2k} + D^{2k-1} - D)P^{-1} = PP^{-1} = I$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

5. Κατασκευάστε (αν υπάρχει) μια διαγωνοποίηση με μετασχηματισμό ομοιότητας του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -10 & 36 & 18 \\ -9 & 26 & 9 \\ 9 & -18 & -1 \end{bmatrix}$.

Έπειτα, βρείτε έναν 3×3 πίνακα X τέτοιον ώστε $X^3 = A$.

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 10 & -36 & -18 \\ 9 & \lambda - 26 & -9 \\ -9 & 18 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 15\lambda^2 +$

$+ 48\lambda + 64 = (\lambda + 1)(\lambda - 8)^2$. Επομένως, ο A έχει μια απλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ και μια διπλή ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$.

Λύνοντας τα συστήματα $(A - (-1)I)X = O$ και $(A - 8I)X = O$, βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα-

αντιπροσώπους $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ για την απλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ και $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ για τη διπλή

ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Άρα ο πίνακας A διαγωνοποιείται με τον ακόλουθο μετασχηματισμό ομοιότητας: $A =$

$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$. Επιπλέον, για τον πίνακα $X = PD^{1/3}P^{-1} =$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$, ισχύει $X^3 = (PD^{1/3}P^{-1})^3 = PDP^{-1} = A$.

6. Υπολογίστε τα στοιχεία του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \delta \\ 1 & \epsilon & \zeta \end{bmatrix}$ ώστε τα διανύσματα $x_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$, $x_2 = [1 \ -1 \ 0]^T$

και $x_3 = [1 \ 0 \ -1]^T$ να είναι ιδιοδιανύσματά του.

Λύση: Έχουμε τα ομογενή συστήματα

$$(A - \lambda_1 I)x_1 = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \delta \\ 1 & \epsilon & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \alpha + \beta = \lambda_1 \\ 1 + \gamma + \delta = \lambda_1 \\ 1 + \epsilon + \zeta = \lambda_1 \end{cases},$$

$$(A - \lambda_2 I)x_2 = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \delta \\ 1 & \epsilon & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \alpha = \lambda_2 \\ 1 - \gamma = -\lambda_2 \\ 1 - \epsilon = 0 \end{cases},$$

$$(A - \lambda_3 I)x_3 = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \delta \\ 1 & \epsilon & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \beta = \lambda_3 \\ 1 - \delta = 0 \\ 1 - \zeta = -\lambda_3 \end{cases},$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι οι ιδιοτιμές του A . Από το δεύτερο και το τρίτο σύστημα συμπεραίνουμε ότι $\delta = \epsilon = 1$ και $\alpha + \gamma = \beta + \zeta = 2$. Αντικαθιστώντας στο πρώτο σύστημα, καταλήγουμε ότι $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = \zeta = 1$.

7. Υπολογίστε την παράμετρο $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A(a) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3-a & a-2 \\ 1 & 2-a & a-1 \end{bmatrix}$ να διαγωνοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έπειτα για την τιμή του a που θα βρείτε κατασκευάστε (πλήρως) μια διαγωνοποίηση του A .

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda + a - 3 & -a + 2 \\ -1 & a - 2 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix}_{(\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2)}$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda + a - 3 & -a + 2 \\ 0 & -\lambda + 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda + a - 3 & -a + 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2). \text{ Επομένως, ο } A$$

έχει μια διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ και μια απλή ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$. Ο πίνακας A διαγωνοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμό του είναι $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν $(A - 1I)(A - 2I) = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-a & a-2 \\ 1 & 2-a & a-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1-a & a-2 \\ 1 & 2-a & a-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν $a = 1$. Θεωρούμε τον πίνακα $A(1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, ο οποίος προφανώς έχει μια διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ και μια απλή ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$. Λύνοντας τα συστήματα $(A(1) - 1I)X = O$ και $(A(1) - 2I)X = O$, βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα-αντιπροσώπους $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ για τη διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ και $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ για την απλή ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$. Άρα ο πίνακας $A(1)$ διαγωνοποιείται με τον ακόλουθο μετασχηματισμό ομοιότητας: $A(1) = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

8. Υπολογίστε την παράμετρο $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A(a) = \begin{bmatrix} 6+2a & 2 & 4+2a \\ 1+a & 3 & 1+a \\ -3-2a & -2 & -1-2a \end{bmatrix}$ να διαγωνοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έπειτα για την τιμή του a που θα βρείτε κατασκευάστε (πλήρως) μια διαγωνοποίηση του A .

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 6 - 2a & -2 & -4 - 2a \\ -1 - a & \lambda - 3 & -1 - a \\ 3 + 2a & 2 & \lambda + 1 + 2a \end{vmatrix}_{(\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1)}$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 6 - 2a & -2 & -4 - 2a \\ -1 - a & \lambda - 3 & -1 - a \\ \lambda - 3 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 6 - 2a & -2 & -4 - 2a \\ -1 - a & \lambda - 3 & -1 - a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2). \text{ Επομένως, ο } A$$

έχει μια διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ και μια απλή ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$. Ο πίνακας A διαγωνοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμό του είναι $m_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν $(A - 3I)(A - 2I) = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3+2a & 2 & 4+2a \\ 1+a & 0 & 1+a \\ -3-2a & -2 & -4-2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4+2a & 2 & 4+2a \\ 1+a & 1 & 1+a \\ -3-2a & -2 & -3-2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν $a = -1$. Θεωρούμε τον πίνακα $A(-1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, ο οποίος προφανώς έχει μια διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ και μια απλή ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$. Λύνοντας τα συστήματα $(A(-1) - 3I)X = O$ και $(A(-1) - 2I)X = O$, βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα-αντιπροσώπους

$$x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ για τη διπλή ιδιοτιμή } \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \text{ και } x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ για την απλή ιδιοτιμή } \lambda_1 = 2. \text{ Άρα ο πίνακας } A(-1) \text{ διαγωνοποιείται με τον ακόλουθο μετασχηματισμό ομοιότητας: } A(-1) = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$