

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ "ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ"

1. α) Έστω $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, με S κυρτό, μια συνάρτηση, και $\bar{x} \in S$. Υποθέτουμε ότι η παράγωγος θετικά κατά κατεύθυνση $\delta_+ f(\bar{x}, x - \bar{x})$ υπάρχει για κάθε $x \in S$.

Ναδειχθεί ότι αν το \bar{x} είναι σημείο τοπικού (ή ολικού) ελαχίστου της f στο S , τότε ισχύει η αναγκαία συνθήκη

$$(1) \quad \delta_+ f(\bar{x}, x - \bar{x}) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in S.$$

β) Ναδειχθεί ότι, αν επιπλέον η f είναι κυρτή στο S , τότε η (1) είναι και ικανή.

γ) Πώς γράφεται η συνθήκη (1) αν η f είναι επιπλέον Fréchet παραγωγίσιμη;

2. Δίνεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης:

Να βρεθεί $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$ που να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση

$$f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$$

κάτω από τους περιορισμούς $(x, y, z) \in S$, όπου

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2, -x + y - z \leq -1\}.$$

Ναδειχθεί ότι το πρόβλημα αυτό έχει λύση. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας το θεώρημα πολλαπλασιαστών Kuhn-Tucker-Lagrange. Είναι η λύση μοναδική?

3. α) Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ομαλή συνάρτηση, $S \subset \mathbb{R}^n$ μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο. Να ορίσετε αναλυτικά τα βήματα του αλγόριθμου Frank-Wolfe με βέλτιστο βήμα, και να αιτιολογήσετε ότι είναι καλώς ορισμένα. Επιπλέον, αν $(x_k)_{k=1}^\infty$ συμβολίζει την ακολουθία που παράγει ο αλγόριθμος, για δοσμένο $x_0 \in S$ να δείξετε ότι η ακολουθία $(f(x_k))_{k=1}^\infty$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = 3x + 2y$ και το σύνολο περιορισμών $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Να εκτελεστεί μια επανάληψη του αλγόριθμου για $x_0 = [1/2, 1/2]^T$.

4. α) Να βρεθεί κατάλληλη ποινικοποιημένη συνάρτηση που αντιστοιχεί στους περιορισμούς $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2, -x + y - z \leq -1\}$. Για το πρόβλημα βελτιστοποίησης $\min_{x \in S} ((x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2)$, να ορίσετε το αντίστοιχο ποινικοποιημένο πρόβλημα.

β) Να οριστεί ο αλγόριθμος Newton-Raphson για την ελαχιστοποίηση ομαλών συναρτήσεων και να εκτελεστεί ένα βήμα της μεθόδου Newton-Raphson για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $f(x, y) = (x - y)^3 + 2x^2 + y^2 - 2x$ (χωρίς περιορισμούς), με αρχικό διάνυσμα το $[0, 0]^T$.

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες. Τα θέματα είναι ισόβαθμα.

Καλή επιτυχία!