

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α ΚΑΙ Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Ε Σ

22 Ιανουαρίου 2018

Απαντήστε και στα τρία θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.

ΘΕΜΑ 1

- α) Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}_p^* = \{\bar{1}, \dots, \bar{p-1}\}$, όπου $p \in \mathbb{N}$ πρώτος, είναι ομάδα με πράξη των πολλαπλασιασμό.
β) Χρησιμοποιώντας το α), δείξτε ότι για οποιονδήποτε $a \in \mathbb{Z}$ που δεν διαιρείται από τον p , ισχύει ότι ο $a^{p-1} - 1$ διαιρείται από τον p .
γ) Χρησιμοποιώντας το β), βρείτε το υπόλοιπο της διαιρεσης του $7^{2018} - 1$ δια 5.
δ) Ταξινομήστε την ομάδα \mathbb{Z}_7 ισομορφικά σύμφωνα με το Θεώρημα Ταξινόμησης Πεπερασμένα Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2

- α) Βρείτε μία υποομάδα της \mathbb{Z}_{108} τάξης 9.
β) Ταξινομήστε την ομάδα \mathbb{Z}_{108} ισομορφικά σύμφωνα με το Θεώρημα Ταξινόμησης Πεπερασμένα Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
γ) Δώστε όλες τις μη ισομορφικές αβελιανές ομάδες τάξης 108 σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα και στη συνέχεια συμπτύξτε τες κατά το δυνατόν. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
δ) Βρείτε μία μη κυκλική υποομάδα της $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18}$ τάξης 9.
ε) Κατασκευάστε έναν μη τετριμμένο ομομορφισμό από την ομάδα \mathbb{Z}_{18} στην \mathbb{Z}_6 που να μην είναι επί. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3

- α) Έστω η μετάθεση της S_8 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & a & 3 & 8 & 5 & 1 & b \end{pmatrix}$. Να βρεθούν τα a, b έτσι ώστε η σ να είναι κύκλος.
β) Έστω η μετάθεση $\tau = (1, 3, 5)(3, 6, 8, 2, 1)(7, 2, 1, 6)(4, 8)$ της S_8 . Αναλύστε την τ σε γινόμενο ξένων κύκλων και σε γινόμενο αντιμεταθέσεων. Βρείτε την τάξη της τ . Βρείτε την τ^{-1} .
γ) Έστω G ομάδα και έστω N υποομάδα της G . Δείξτε ότι η N είναι κανονική υποομάδα της G αν υπάρχει ομάδα G' και ομομορφισμός ομάδων $f : G \longrightarrow G'$ έτσι ώστε η N να είναι πυρήνας του f .
δ) Εφαρμόζοντας το παραπάνω δείξτε ότι η εναλλάσσουσα υποομάδα A_n της ομάδας μεταθέσεων S_n είναι κανονική υποομάδα της S_n .

Μονάδες 3

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου