

Επαναληπτική εξέταση στην Πραγματική Ανάλυση, 5/9/2017

Θέμα 1

(α) Άν $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, δώστε τον ορισμό του όνω φράγματος του A και αν το A είναι όνω φράγματος, δώστε τον ορισμό του $\sup A$.

(β) Εστω A, B μη κενά όνω φράγματα υποσύνολα του \mathbb{R} .

(i) Δείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(ii) Δείξτε ότι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(γ) Άν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και φράγματη ακολουθία στο \mathbb{R} , τότε δείξτε ότι $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim a_n$.

(δ) Άν $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φράγματων διαστημάτων του \mathbb{R} , τότε δείξτε ότι $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Θέμα 2 Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.

(α) Δώστε τον ορισμό του ε-διαχωρισμένου και του μεγιστικού ε-διαχωρισμένου υποσυνόλου του X .

(β) Δείξτε ότι αν A_n , για $n \in \mathbb{N}$, είναι μεγιστικό $\frac{1}{n}$ -διαχωρισμένο υποσύνολο του X , τότε το $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .

(γ) Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(i) Ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος. (δημ. πικνό τα αριθμ.)

(ii) Κάθε $A \subset X$ ε-διαχωρισμένο είναι το πολύ αριθμήσιμο.

(δ) Άν ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος και $Y \subset X$, τότε ο $(Y, \rho|_Y)$ είναι διαχωρίσιμος.

(ε) Άν ο (X, ρ) είναι συμπαγής, τότε κάθε $A \subset X$ ε-διαχωρισμένο είναι πεπερασμένο.

Έστω ότι
έναι απόφοι
(X, ρ) συμπαγής

Θέμα 3 Έστω $(X, \rho_1), (Y, \rho_2)$ μετρικοί χώροι. Ορίζουμε

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\rho_1(x_1, x_2), \rho_2(y_1, y_2)\}, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$$

(α) Δείξτε ότι η ρ είναι μετρική στον $X \times Y$.

(β) Άν $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στον $X \times Y$ και $(x, y) \in X \times Y$, τότε δείξτε ότι $(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho} (x, y)$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\rho_1} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho_2} y$.

(γ) Άν οι $(X, \rho_1), (Y, \rho_2)$ είναι συμπαγείς δείξτε ότι και ο $(X \times Y, \rho)$ είναι συμπαγής.

$UV_i = (X, \rho)$

i_1, \dots, i_n
 $\bigcup_{i=1}^n V_i \ni (x)$

Θέμα 4 (α) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $(C_i)_{i \in I}$ μία οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Δείξτε ότι:

(i) $C = \bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

(ii) Άν $V \subset X$ ανοικτό ώστε $C \subset V$, τότε υπάρχει $F \subset I$ πεπερασμένο ώστε $\bigcap_{i \in F} C_i \subset V$. \rightarrow Δημ. νδσ Η συμπαγής

(β) Έστω $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον X , τότε $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y .

(ii) Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

Ορ. ωντης Άν $\rho(x, y) < \delta$ τότε $d(f(x), f(y)) < \epsilon$

(x_n) Cauchy: Επο: $\forall n, m \geq n \quad \rho(x_n - x_m) \leq \epsilon$

Νδσ $f(x_n)$ ak. Cauchy: Επο: $\forall n, m \geq n \quad d(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$