

## Γραπτή Εξέταση

Ιενικές Οδηγίες: Να επιλέξετε ένα (1) θέμα από τα δύο (2) βαθμολογικώς ισοδύναμα θέματα της Ομάδας A (20% κάθε θέμα) και δύο (2) θέματα από τα τρία (3) βαθμολογικώς ισοδύναμα θέματα της Ομάδας B (40% κάθε θέμα). Διάρκεια εξέτασης: 2h. Καλή επιτυχία!

### Ομάδα A

1. Τι ακριβώς εννοούμε με την έκφραση «*a priori* φύση των μαθηματικών»; Τι προβλήματα θέτει η «*a priori* φύση των μαθηματικών» για τον φιλοσοφικό εμπειρισμό;<sup>1</sup> Ειδικότερα, ποιο δίλημμα εγείρει για τον / την εμπειριστή φιλόσοφο; Σκιαγραφήστε: κριτικά τη στάση, απέναντι στο δίλημμα αυτό, του Hume.

2. Πους ακριβώς φιλοσοφικές θέσεις αντιπροσωπεύουν οι εκφράσεις «ρεαλισμός ως προς τις μαθηματικές οντότητες» και «ρεαλισμός ως προς την αληθοτιμή των μαθηματικών προτάσεων»; Αναπτύξτε ένα επιχείρημα που οδηγεί από τον πραλιόμο ως προς την αληθοτιμή των μαθηματικών προτάσεων στον ρεαλισμό ως προς τις μαθηματικές οντότητες (διατυπώνοντας μια σαφήνια τις τυχόν πρόσθετες προκείμενες). Ποια η στάση απέναντι στον ρεαλισμό ως προς τις μαθηματικές οντότητες του Πλάτωνα, του Kant, του Frege και του Gödel;

### Ομάδα B

1. Ο Kant ισχυρίστηκε ότι οι (μη τετριψμένες) προτάσεις των μαθηματικών είναι συνθετικές *a priori*.<sup>2</sup> Διατυπώστε τους κατά Kant ορισμούς των όρων «συνθετική πρόταση» και «*a priori* πρόταση». Για καθεμία από τις προτάσεις «7+5=12» και «Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κάθε τριγώνου ισούται με δύο ορθές»,<sup>3</sup> αναπτύξτε ένα καντιανό επιχείρημα και «Το συμπέρασμα ότι είναι συνθετική *a priori*. Με ποιο ακριβώς τρόπο συμβιβάζει η καντιανή φιλοσοφία την προς το συμπέρασμα ότι είναι συνθετική *a priori*. Με ποιο ακριβώς τρόπο συμβιβάζει η καντιανή φιλοσοφία την προς το συμπέρασμα ότι είναι συνθετική *a priori* εφαρμογής των μαθηματικών στη μελέτη του αναγκαιότητα και την *a priori* φύση των μαθηματικών με την επιτυχία εφαρμογής των μαθηματικών στη μελέτη του κόσμου της εμπειρίας; Και για ποιους λόγους κρίθηκε ανεπαρκής η καντιανή φιλοσοφία των μαθηματικών μετά τις εξελίξεις στα μαθηματικά και τη φυσική κατά τον 19ο και τον 20ο αιώνα;

2. (α) Τι ακριβώς είναι ένας μη κατηγορηματικός ορισμός; Δώστε ένα μαθηματικό παράδειγμα μη κατηγορηματικού ορισμού. Συζητήστε κριτικά τη μεθοδολογική αποδοχή και τη μεθοδολογική απόρριψη των μη κατηγορηματικών ορισμών στα μαθηματικά από διαφορετικές φιλοσοφικές απόψεις για το οντολογικό καθεστώς των μαθηματικών αντικειμένων. (β) Δείξτε (χωρίς «λεπτομέρειες») ότι στο πλαίσιο της αξιωματικής θεωρίας συνόλων Zermelo-Fraenkel με αξίωμα επιλογής (ZFC), το αξίωμα (ύπαρξης) απείρου σε σύζευξη με το αξίωμα δυναμοσυνόλου εισάγει μη κατηγορηματικά στοιχεία στο σύμπαν της συνολοθεωρίας.

Υπενθύμιση. (1) Αξίωμα (ύπαρξης) απείρου:  $(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$ . (2) Αξίωμα δυναμοσυνόλου:  $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$ . (3) Θεώρημα Cantor: για κάθε σύνολο  $x$ ,  $|x| < |P(x)|$ , όπου  $P(x)$  το δυναμοσύνολο του  $x$  και  $|x|$  η πληθικότητα του  $x$ .

3. Αναπτύξτε την κατά Hilbert διάκριση μεταξύ «πραγματικών» και «ιδεατών» («ιδανικών») μαθηματικών. Με αφετηρία αυτή τη διάκριση, εντοπίστε τα καντιανά και τα φορμαλιστικά / εργαλειοκρατικά στοιχεία της φιλοσοφίας των μαθηματικών του Hilbert. Σκιαγραφήστε χωρίς τεχνικές λεπτομέρειες το πρόγραμμα του Hilbert για τη θεμελίωση των μαθηματικών καθώς και τις δυσκολίες που επέφεραν τα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel στην ολοκλήρωση του πυργάριματος αυτού.

<sup>1</sup> Κατά τους εμπειριστές, όλη η γνώση γεγονότων της πραγματικότητας (γνώση που διακρίνεται από εκείνη που αφορά καθαρώς λογικές σχέσεις μεταξύ εννοιών) «βασίζεται» στην, ή «προέρχεται» από την, εμπειρία.

<sup>2</sup> Ωστόσο, προτάσεις όπως «1=1» ή «Όλα τα τρίγωνα έχουν τρεις πλευρές» είναι αναλυτικές.

<sup>3</sup> Στην αριθμητική Peano και στην ευκλείδεια γεωμετρία αντίστοιχα.