

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ (Ιανουάριος 2016)**  
 ΕΜΠ - Τομέας Φυσικής - ΣΕΜΦΕ, Αναπλ. Καθ. Γ. Βαρελογιάννης

**Μέρος Α:**

**A.1:**

- α) Ενα κλασσικό ιδανικό αέριο  $N$  σωματιδίων σε τρισδιάστατο δοχείο όγκου  $V$  έχει συνάρτηση επιμερισμού  $Z = (1/N!)(V/\lambda^3)^N$  όπου  $\lambda = \sqrt{(2\pi\hbar^2)/(mkT)}$ . Γιατί υπάρχει ο συντελεστής  $1/N!$ ; Τί είναι το  $\lambda$ ; Τι πρέπει να ισχύει για το πηλίκο  $N\lambda^3/V$  ώστε να έχει νόημα η κλασσική προσέγγιση και γιατί;
- β) Να γράψετε τη λεγραφικά τα αξιώματα της κβαντομηχανικής και να δείξετε ότι ισχύει για καθαρές καταστάσεις η σχέση  $\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$  και για στατιστικό μείγμα καταστάσεων η σχέση  $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{A}\}$ .
- γ) Αποδείξτε τις σχέσεις  $S = k \ln(Z) - k \sum_i \lambda_i \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \lambda_i}$  και  $dS = k \sum_i \lambda_i d\langle \hat{X}_i \rangle$ . Από την τελευταία σχέση τι προκύπτει για το φυσικό νόημα των πολλαπλασιαστών Lagrange και την προσθετικότητα των φυσικών ποσοτήτων στις οποίες αντιστοιχούν;
- δ) Δείξτε ότι όταν τα  $\hat{X}_i$  και  $\hat{X}_j$  είναι δύο διατηρήσιμες ποσότητες που μετατίθενται ισχύει η  $\langle \hat{X}_i \hat{X}_j \rangle - \langle \hat{X}_i \rangle \langle \hat{X}_j \rangle = \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}$ .

**A.2:** Για την υπεραγώγιμη μετάβαση, παράμετρος τάξεως μπορεί να ορισθεί μια κυματοσυνάρτηση  $\Psi = |\Psi|e^{-i\phi}$ . Χωρίς την παρουσία πεδίων, η πυκνότητα ελεύθερης ενέργειας μπορεί να υπακούει ένα ανάπτυγμα της μορφής  $f_S = f_N + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4$  όπου  $\alpha, \beta > 0$ .

- α) Πώς η παραπάνω παράμετρος τάξης αναπαριστά τη συμμετρία που σπάει κατα τη μετάβαση αυτή;
- β) Γιατί στο ανάπτυγμα της πυκνότητας ελεύθερης ενέργειας ειπεισέρχονται μόνο άρτιες δυνάμεις της απόλυτης τιμής της παραμέτρου τάξεως; (ανεξάρτητα από την τάξη της μετάβασης).
- γ) Θα είναι συνεχής η παράμετρος τάξης στο σημείο της μετάβασης; Θα υπάρχει συνύπαρξη φάσεων στο σημείο της μετάβασης; Γιατί;
- δ) Εάν η παράμετρος τάξης ήταν ασυνεχής στο σημείο της μετάβασης, τι θα άλλαζε στο ανάπτυγμα της πυκνότητας ελεύθερης ενέργειας;

**Μέρος Β:**

Μέτρηση της ενέργειας ενός σωματιδίου μπορεί να δώσει μόνον δύο δυνατές τιμές  $E_1$  και  $E_2$  με αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις  $|u_1\rangle$  και  $|u_2\rangle$ . Στη βάση  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$  οι τελεστές  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  έχουν αντίστοιχα τη μορφή πίνακα  $\hat{A} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  και  $\hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Μετά τη μέτρηση της φυσικής ποσότητας που αντιστοιχεί στον τελεστή  $\hat{A}$  το σύστημα μπορεί να βρεθεί σε μια από τις δύο καταστάσεις  $|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|u_1\rangle \pm |u_2\rangle]$

**B.1:** Αν το σωματίδιο βρίσκεται σε Στατιστικό Μείγμα καταστάσεων έχοντας πιθανότητα  $P_{|\Phi\rangle} = 0.25$  να βρίσκεται στην κατάσταση  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle]$  και πιθανότητα  $P_{|u_2\rangle} = 0.75$  να βρίσκεται στην κατάσταση  $|u_2\rangle$ , να βρεθούν η εντροπία και οι μέσες τιμές  $\langle \hat{H} \rangle$ ,  $\langle \hat{A} \rangle$  και  $\langle \hat{B} \rangle$ .

**B.2:** Θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύστημα που αποτελείται από δύο διακριτά και ανεξάρτητα σωματίδια όπως τα παραπάνω τα οποία έχουν ανταλλαγές θερμότητας με δο-

α) Να γράψετε την χαμιλτονιανή του κάθε σωματιδίου ( $\hat{H}_1$  και  $\hat{H}_2$  αντίστοιχα) τη συνολική χαμιλτονιανή  $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$ , τους αντίστοιχους τελεστές  $\hat{A}_1$ ,  $\hat{A}_2$  και  $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$  καθώς και τον τελεστή πυκνότητας του συνόλου των δύο σωματιδίων στη σχετίζεται η συνολική χαμιλτονιανή  $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$  είναι διαγώνια. Πως

βάση στην οποία η συνολική χαμιλτονιανή  $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$  είναι διαγώνια. Πως σχετίζεται η συνολική συνάρτηση επιμερισμού με τη συνάρτηση επιμερισμού του κάθε σωματιδίου; Ποιά είναι η εντροπία του συστήματος;

β) Να υπολογίσετε την εσωτερική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων με δύο τρόπους αποδεικνύοντας ότι πράγματι επαρκεί η συνάρτηση επιμερισμού για τον υπολογισμό της.

γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της  $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ . Μπορούσε να προβλευθεί το αποτέλεσμα αυτό;

δ) Υπολογίστε τις μέσες τιμές της  $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$  της  $\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$  και της  $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$  αν επιπλέον του στατιστικού περιορισμού στην ενέργεια το σύστημα έχει στατιστικό περιορισμό και ως προς την ποσότητα  $\hat{B}$  με αντίστοιχο πολλαπλασιαστή Lagrange  $\lambda_B$ .

### Μέρος Γ:

Θεωρούμε μικροσκοπικές παγίδες με δυναμικό ισοτροπικού τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας ω όπου μόνον τα επίπεδα με ενέργεια  $E \leq (5/2)\hbar\omega$  είναι προσπελάσιμα. Οι παγίδες είναι απολύτως μονωμένες.

**Γ.1:** Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού, τον τελεστή πυκνότητας και την εντροπία μιας παγίδας όταν αυτή έχει παγδεύσει: α): 3 ταυτόσημα φερμιόνια χωρίς σπίν. β): 4 ταυτόσημα φερμιόνια χωρίς σπίν.

**Γ.2:** Οι παγίδες που έχουν παγιδεύσει 3 ταυτόσημα φερμιόνια χωρίς σπίν αναμειγνύονται με μονοδιάστατους νανοαγωγούς, έτσι ώστε να έχουν πιθανότητα 0.5 να προσαρμοσθούν στο άκρο ενός νανοαγωγού. Στην περίπτωση αυτή παραμορφώνεται κατα τη μία διεύθυνση το δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή έτσι ώστε να έχουμε συχνότητα  $\omega + \eta$  κατά τη διεύθυνση αυτή. Οι παγίδες που είναι προσαρμοσμένες στο άκρο ενός νανοαγωγού (και μόνον αυτές) έχουν ανταλλαγές θερμότητας με το περιβάλλον. Βρείτε τον τελεστή πυκνότητας, τη συνάρτηση επιμερισμού, την εντροπία, την εσωτερική ενέργεια και τη θερμοχωρητικότητα  $N$  μού, την εντροπία την εσωτερική ενέργεια και τη θερμοχωρητικότητα  $N$  παγίδων που έχουν παγιδεύσει 3 ταυτόσημα φερμιόνια υπό τις συνθήκες αυτές.

**Γ.3:** Οι  $N$  παγίδες του ερωτήματος Γ.2 μπορούν να κινούνται ελεύθερα σε αέρια μορφή μέσα σε τρισδιάστατο δοχείο μεγάλου όγκου  $V$ . Προσεγγίζουμε την κίνηση του συνόλου των παγίδων με το πρότυπο του κλασσικού ιδανικού αερίου μάζα των νανοαγωγών θεωρείται μηδαμινή ώστε όλες οι παγίδες να έχουν την ίδια αδρανειακή μάζα  $m$ . (Υπενθυμίζεται ότι για το τρισδιάστατο κλασσικό ιδανικό αέριο  $Z_N = (1/N!)(V/\lambda^3)^N$  με  $\lambda = \sqrt{(2\pi\hbar^2)/(mkT)}$  και για μεγάλο  $N$  έχουμε  $\ln(Z_N) \approx N \ln(Z_1/N) + N$  όπου  $Z_1 = V/\lambda^3$ ). Βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού την  $N \ln(Z_1/N) + N$  όπου  $Z_1 = V/\lambda^3$ . Βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού την εντροπία την εσωτερική ενέργεια και τη θερμοχωρητικότητα του σχεδόν ιδανικού αερίου των  $N$  παγίδων.