

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΝΟΓΕΣ»
 7 Σεπτεμβρίου 2018

A

ΘΕΜΑ 1^ο (Μονάδες 2)

Έστω V Ευκλειδείος χώρος με εσωτερικό γινόμενο \langle , \rangle και έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του. Αν $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in V$, να αποδείξετε ότι:

$$(a) x_i = \langle x, v_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$(b) \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

ΘΕΜΑ 2^ο (Μονάδες 3: 1,5 - 0,5 - 1)

$$\text{Δίνεται ο πίνακας } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(α) Να βρείτε ορθογώνιο πίνακα P που διαγωνοποιεί τον πίνακα A.

(β) Να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

(γ) Να εκφράσετε τον πίνακα $A^\kappa, \kappa \in \mathbb{N}^*$, ως πολυώνυμο του πίνακα A βαθμού το πολύ 1.

ΘΕΜΑ 3^ο (Μονάδες 2,3)

Κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας.

ΘΕΜΑ 4^ο (Μονάδες 2,7: 1 - 0,7 - 1)

(α) Έστω A ένας $k \times k$ αντιστρέψιμος πίνακας για τον οποίο γνωρίζουμε όλες τις ιδιοτιμές του $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα x_1, x_2, \dots, x_k . Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του συμπληρωματικού πίνακα $adj(A)$.

(β) Αποδείξτε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα διαιρεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

(γ) Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας, λ_0 μια μη μηδενική πραγματική ιδιοτιμή του A, και x_0, y_0 δύο μη μηδενικά πραγματικά διανύσματα τέτοια ώστε $(A - \lambda_0 I)x_0 = 0$, $y_0^T (A - \lambda_0 I) = 0$ και $y_0^T x_0 = 0$. Να αποδείξετε ότι η ιδιοτιμή λ_0 είναι πολλαπλή. (Υπόδειξη: Αν η ιδιοτιμή λ_0 έχει γεωμετρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη των 1 τότε δεν υπάρχει κάτι να αποδειχθεί. Για το λόγο αντό, υποθέτουμε ότι έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 1 και αποδεικνύουμε ότι έχει τουλάχιστον ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα.)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!