

**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2013-14 στο Μάθημα  
MONTELA AΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ και ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ  
ΣΕΜΦΕ**

Διάρκεια Εξέτασης : 2.30 ώρες.

**ΖΗΤΗΜΑ 1** (Βαθμός: 2.0)

- (A) Έστω  $Y$  τ.μ. της Λογιστικής κατανομής με σ.π.π.  $f(y) = \sigma^{-1} \frac{\exp[(y-\mu)/\sigma]}{(1+\exp[(y-\mu)/\sigma])^2}$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $-\infty < \mu < \infty$  και  $\sigma > 0$ . Δείξτε ότι  $T = \exp(Y)$  έχει συνάρτηση επιβίωσης  $S(t) = [1 + (t/\alpha)^{\beta}]^{-1}$ ,  $t > 0$ , όπου  $\alpha = e^{\mu}$  και  $\beta = \sigma^{-1}$ .
- (B) Δείξτε πώς με την εκτιμήτρια Kaplan-Meier μπορούμε να κάνουμε μια γραφική εξέταση καταλληλότητας για το μοντέλο της Λογιστικής και της Λογαριθμο-λογιστικής κατανομής.

**ΖΗΤΗΜΑ 2** (Βαθμός: 2.0)

Δοθέντος μιας συμμεταβλητής  $Z$ , υποθέστε ότι ο λογαριθμός  $Y$  του χρόνου επιβίωσης  $T$  περιγράφεται από το γραμμικό μοντέλο της επιταχυνόμενης διακοπής

$$Y = \ln(T) = \mu + \beta Z + \sigma \epsilon,$$

όπου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου σφάλματος  $\epsilon$  είναι της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής  $N(0, 1)$ ,

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\epsilon^2/2], \quad -\infty < \epsilon < \infty.$$

- (i) Γράψτε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας της  $T$  μέσω της τ.μ.  $\epsilon$ , όταν στα δεδομένα υπάρχουν και δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις και
- (ii) δείξτε πώς προσαρμόζεται το μοντέλο αυτό.

Από τα υπόλοιπα 4 Ζητήματα επιλέξτε 2

**ΖΗΤΗΜΑ 3** (Βαθμός: 3.0)

- (A) Γράψτε τη λογαριθμοποιημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας για την κατανομή Weibull με συνάρτηση επιβίωσης  $S(t) = \exp\{-(t/\alpha)^\eta\}$ ,  $t > 0$ ,  $\alpha > 0$  και  $\eta = 1$ , όταν έχουμε και δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου  $\alpha$ .

- (B) Τα παρακάτω αποτελέσματα αφορούν το χρόνο έως ότου καταστραφούν 10 μονάδες από εργοστάσιο Α και 14 από Β, εκ των οποίων οι  $k=15$  παρατηρήσεις στο σύνολο είναι μη-αποκομμένες. Στο σύνολο των δεδομένων προσαρμόζεται η Εκθετική κατανομή. Στη συνέχεια προσαρμόζεται ένα μοντέλο της παλινδρόμησης της Εκθετικής κατανομής με συμμεταβλητή  $z = 0$ , για τις μονάδες του εργοστασίου Α, αλλιώς  $z = 1$ , για τις μονάδες του Β.  
Εξετάστε αν υπάρχουν διαφοροποιήσεις μεταξύ των δύο εργοστασίων ελέγχοντας την υπόθεση  $H_0$ :  $\alpha(z) = \alpha$  με εναλλακτική την  $H_1$ :  $\alpha(z) = \alpha + \beta z$  με (i) τη διαφορά των λογαρίθμων των μεγιστοποιημένων πιθανοφανειών και με (ii) ένα 0.99-διάστημα εμπιστοσύνης για το  $\hat{\beta}$ . Να ερμηνευτεί το  $\hat{\beta}$ .  
(Δίνονται υπό την  $H_0$ :  $\sum_{i=1}^n t_i = 2252$  και υπό την  $H_1$ :  $\hat{\beta} = -0.439(se = 0.527)$ ,  $\hat{l}_1 = -89.818$ ).

#### ZHTHMA 4 (Βαθμός: 3.0)

(Α) Δώστε τον ορισμό του κριτηρίου AIC και πώς χρησιμοποιείται ;

(Β) Γράψτε το μοντέλο αναλογικής διακινδύνευσης του Cox.

(Γ) Προσαρμόζεται ένα μοντέλο αναλογικής διακινδύνευσης του Cox στο χρόνο (σε ημέρες) παραμονής 50 ατόμων στο πελατολόγιο μιας εταιρείας. Να ελέγξετε αν η διάρκεια αυτή εξαρτάται από την  $x_1$  (ηλικία σε έτη) και  $x_2$  (το φύλο, γυναίκα=0, άνδρας=1), με τη διαδικασία της διαδοχικής αφαίρεσης

(i) με τον έλεγχο Wald (ii) και με το κριτήριο AIC στα ακόλουθα μοντέλα:

**Μοντέλο I**

Συμμεταβλητές	$\hat{\beta}$	$se(\hat{\beta})$
$x_1$	0.001249	0.004258
$x_2$	-0.277929	0.120457
$\hat{\ell} = -1383.898$		

**Μοντέλο II**

Συμμεταβλητές	$\hat{\beta}$	$se(\hat{\beta})$
$x_2$	-0.2833	0.1191
$\hat{\ell} = -1383.941$		

και  $\hat{\ell} = -1386.8042$  για το μοντέλο χωρίς συμμεταβλητές.

(iii) Να ερμηνευτούν τα  $e^{\hat{\beta}}$  και να κατασκευαστούν 95% – διαστήματα εμπιστοσύνης των  $e^{\hat{\beta}}$  του τελικού μοντέλου.

#### ZHTHMA 5 (Βαθμός: 3.0)

Έστω ηλεκτρονικό σύστημα με επαναλαμβανόμενες βλάβες και ενδιάμεσες διάρκειες ζωής σε ώρες: 68, 39, 102, 65, 12, 171, 183, 32, 202, 37, και με συνολικό χρόνο παρακολούθησης 1000 ωρών.

(i) Μέσω μιας γραφικής παράστασης των  $\sqrt{x_i}$  και  $\sqrt{x_{i-1}}$  ελέγξτε αν οι χρόνοι αυτοί συσχετίζονται μεταξύ τους.

(ii) Με βάση το αποτέλεσμα  $\bar{T} \sim N(T/2, T^2/12n)$  να ελεγχθεί η σταθερότητα του ρυθμού διαδοχικών βλαβών. Πώς καλείται αυτός ο έλεγχος;

Τι συμπεράσματα βγάζετε από τα δύο αυτά ερωτήματα;

#### ZHTHMA 6 (Βαθμός: 3.0)

(i) Έστω  $T_1, T_2, \dots, T_n$  ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. της Εκθετικής κατανομής με σ.π.π.

$f(t) = \frac{1}{\alpha} \exp(-t/\alpha)$ ,  $t > 0, \alpha > 0$ , και  $T_{(1)} = \min_i \{T_i : i = 1, \dots, n\}$ . Να αποδειχθεί ότι  $T_{(1)}$  είναι της Εκθετικής κατανομής, να δοθεί η παράμετρός της σε σχέση με αυτήν της αρχικής κατανομής και να βρεθεί η  $E(T_{(1)})$ .

(ii) Να βρεθούν οι ελάχιστες διαδρομές του παρακάτω συστήματος. Θεωρείται ότι όλα τα εξαρτήματα λειτουργούν ανεξάρτητα και ισόνομα και σύμφωνα με την δοθείσα παραπάνω Εκθετική κατανομή. Με βάση το αποτέλεσμα του (i) ερωτήματος αυξάνοντας τον αριθμό εξαρτημάτων σε μια τυχούσα διαδρομή μειώνεται η αυξάνεται ο μέσος χρόνος λειτουργίας της διαδρομής;

(iii) Προσδιορίστε ένα άνω φράγμα της αξιοπιστίας  $R(\mathbf{p})$  σε τυχούσα χρονική στιγμή  $t$ , όταν η κατανομή της διάρκειας ζωής του κάθε εξαρτήματος είναι η Εκθετική με  $p = S(t) = \exp(-t/\alpha)$ .

