

**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ στο Μάθημα**  
**MONTELA AΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ και ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ**  
**ΣΕΜΦΕ**  
**Χειμερινό Εξάμηνο 2012-13**

Διάρκεια Εξέτασης : 2.30 ώρες

Το Ζήτημα 1 είναι υποχρεωτικό. Από τα υπόλοιπα 5 Ζητήματα επιλέξτε 2.

**ZHTHMA 1** (Βαθμός: 5)

(A) Γράψτε τη λογαριθμικοποιημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας για την κατανομή Weibull με συνάρτηση επιβίωσης  $S(t) = \exp\{-(t/\alpha)^\eta\}$ ,  $t > 0$ ,  $\alpha > 0$  και  $\eta > 0$ , όταν έχουμε μη αποκομμένες καθώς και δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις.

(B) Τα παρακάτω αποτελέσματα αφορούν τη διάρκεια (σε εβδομάδες) μέχρι την απαλλαγή μιας ασθενειας μετά από θεραπεία σε  $n=42$  ασθενείς (θεραπεία A σε 21 ασθενείς και θεραπεία B στους υπόλοιπους 21), εκ των οποίων οι  $k=30$  παρατηρήσεις στο σύνολο είναι μη-αποκομμένες. Προσαρμόζεται η κατανομή Weibull στο σύνολο των δεδομένων.

$$(\Delta\text{ίνονται } \hat{\eta} = 1.14, \hat{\alpha} = \left[ \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\eta}} / k \right]^{1/\hat{\eta}}, \sum_{i=1}^n \delta_i \ln t_i = 59.5 \text{ και } \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\eta}} = 804.4).$$

Στη συνέχεια προσαρμόζεται ένα μοντέλο της παλινδρόμησης Weibull με συμμεταβλητή  $x = 0$ , όταν οι ασθενείς λαμβάνουν τη θεραπεία A, αλλιώς  $x = 1$ , όταν λαμβάνουν τη θεραπεία B. (Δίνονται  $\hat{\beta}_0 = 2.24835$  (0.165972),  $\hat{\beta}_1 = 1.26733$  (0.310640),  $\hat{\eta} = 1.36576$  (0.201165) και  $\hat{\ell}_1 = -106.579$ ).

Ελέγξτε αν υπάρχουν διαφοροποιήσεις μεταξύ των δύο ομάδων ασθενών σε ότι αφορά την αποτελεσματικότητα της θεραπείας

- (i) με έναν έλεγχο του Wald καθώς και
- (ii) με έλεγχο του λόγου των πιθανοφανειών.

(iii) Ενισχύστε τα συμπεράσματά σας με έναν έλεγχο log-rank. ( $\Delta\text{ίνεται } u = \sum_j u_j = 10.251$ ,  $v = \sum_j v_j = 6.257$ )

(iv) Απαλλάσσεται από την ασθενεια πιο γρήγορα η μία ομάδα από την άλλη ; αν ναι ποιά ;

Με βάση τις παραπάνω εκτιμήσεις των παραμέτρων  $\eta$ ,  $\beta_0$  και  $\beta_1$

(v) να βρεθούν οι ε.μ.π. των δύο διαμέσων  $t_0$  για τις δύο αυτές ομάδες ασθενών και

(vi) βρείτε τις ε.μ.π. των παραμέτρων της εναλλακτικής παραμέτρησης

$$S(t; x) = \exp[-t^\eta (\exp(\beta_0^* + \beta_1^* x))].$$

**ZHTHMA 2** (Βαθμός: 2.5)

(A) Έστω διάρκεια ζωής  $T > 0$  της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $\lambda > 0$  και σ.π.π.  $f(t|\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$ , όπου  $\lambda$  μια τ.μ. της κατανομής Γάμμα ( $\theta, \alpha$ ) με σ.π.π.  $g(\lambda) = \theta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\theta\lambda} / \Gamma(\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\theta > 0$ . Δείξτε ότι η σ.π.π. της μη δεσμευμένης τ.μ.  $T$  είναι  $f(t) = \alpha \theta^\alpha / [(\theta + t)^{\alpha+1}]$ ,  $t \geq 0$  (κατανομή Pareto). Στη συνέχεια βρείτε την  $S(t)$ .

(B) Η διάρκεια ζωής  $T$  της μπαταρίας ενός βηματοδότη, σε χρόνια, ακολουθεί την κατανομή Pareto με  $\alpha = 4$  και  $\theta = 5$ . Αν για προληπτικούς λόγους μια μπαταρία που ακόμα λειτουργεί, αντικατασταθεί τη χρονική στιγμή  $t_0$ , στην οποία το 99% των μπαταριών λειτουργεί ακόμη (δηλαδή  $P(T > t_0) = 0.99$ ), να βρείτε το  $t_0$ .

**ZHTHMA 3** (Βαθμός: 2.5)

(A) Έστω τ.μ.  $-\infty < Y < \infty$  της κατανομής Gumbel με παραμέτρους  $-\infty < \mu < \infty$  και  $\sigma > 0$ , θέσης και κλίμακας αντίστοιχα. Δείξτε ότι  $T = \exp(Y)$  είναι της κατανομής Weibull με παραμέτρους  $\alpha > 0$  κλίμακας και  $\eta > 0$  σχήματος. Βρείτε τις σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων των δύο αυτών κατανομών.

(B) Τα ακόλουθα δεδομένα αφορούν τη διάρκεια αντοχής (σε εκατομμύρια περιστροφές) 7 ρουλεμάν 0.80 1.00 1.37 2.25 2.95 3.70 6.07. Με τη βοήθεια της κατανομής Gumbel εκτιμήστε τις παραμέτρους της κατανομής Weibull με τη μέθοδο των ροπών.

**ZHTHMA 4** (Βαθμός: 2.5)

(A) Να δοθεί ο ορισμός και η χρήση των υπολοίπων Cox-Snell.

(B) Δώστε τον ορισμό του μοντέλου του Cox. Εξηγήστε τη βασική του ιδιότητα.

**ZHTHMA 5** (Βαθμός: 2.5)

Έστω ότι σύστημα παρακολουθείται στο χρονικό διάστημα  $(0, T]$ , εντός του οποίου και κατά τις χρονικές στιγμές  $0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$  πραγματοποιούνται  $n$  διακοπές. Υποθέτοντας ότι  $T = t_n$  και ότι οι τ.μ.  $\left(\frac{T_i}{t_n}\right) \sim U[0, 1]$ , δείξτε ότι με βάση το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα η μέση τιμή  $\bar{T}$  των  $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ ,

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^{n-1} T_i / (n-1) \sim N(t_n/2, t_n^2/12(n-1))$$

και κατά συνέπεια ότι

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} T_i / t_n - (n-1)/2}{\sqrt{(n-1)/12}} \sim N(0, 1).$$

Πώς ονομάζεται η ελεγχοσυνάρτηση αυτή και πού χρησιμοποιείται;

**ZHTHMA 6** (Βαθμός: 2.5)

(i) Να βρεθούν οι ελάχιστες διαδρομές και ελάχιστες τομές του παρακάτω συστήματος. Θεωρείται ότι όλα τα εξαρτήματα λειτουργούν ανεξάρτητα.

(ii) Προσδιορίστε ένα κάτω φράγμα της αξιοπιστίας  $R(\mathbf{p})$  σε τυχούσα χρονική στιγμή  $t$ , όταν τα εξαρτήματα είναι όμοια, δηλαδή όταν η πιθανότητα λειτουργίας του κάθε εξαρτήματος είναι  $p_i = p$ .

