

**Εξέταση στα «Μαθηματική Προτυποποίηση»,**  
**Σγολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών**  
**14 Ιουνίου 2016, Διάρκεια: 2.5h**

Διδάσκων: Ι. Καραφύλλης

**Θέμα 1<sup>ο</sup>:** (α) Να ελαχιστοποιήσετε το συναρτησιακό  $J(y) = \int_0^1 (2y^2(t) - y(t)\dot{y}(t) + \dot{y}^2(t)) dt$  με περιορισμούς  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 2$ . (β) Να ελαχιστοποιήσετε το συναρτησιακό  $J(y) = \int_0^1 (2y^2(t) - y(t)\dot{y}(t) + \dot{y}^2(t)) dt$  με περιορισμούς  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 2$  και  $\int_0^1 y(t) dt = 1$ .

**Θέμα 2<sup>ο</sup>:** (α) Ασυμπίστο ρευστό ρέει στην περιοχή  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ . Αν η κατακόρυφη συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας του ρευστού είναι  $v(x, y) = x \exp(-y)$  για κάθε  $(x, y) \in D$  και αν η οριζόντια συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας του ρευστού είναι  $u(1, y) = 1$  για  $y \in [0, 1]$ , να υπολογίσετε την οριζόντια συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας του ρευστού στη θέση  $(0.5, 0.5)$ . (β) Να δώσετε το μοντέλο Lotka-Volterra για ένα κλειστό οικοσύστημα με τρεις πληθυσμούς, στο οποίο ισχύει η ακόλουθη τροφική αλυσίδα: το είδος 1 τρέφεται αποκλειστικά από το είδος 3, το είδος 2 τρέφεται αποκλειστικά από το είδος 3 και το είδος 3 τρέφεται από ένα σταθερό φυσικό πόρο του οικοσυστήματος.

**Θέμα 3<sup>ο</sup>:** Έστω η διαφορική εξίσωση  $\ddot{y}(t) + y(t) + \varepsilon y^5(t) = 0$ , όπου  $\varepsilon > 0$  είναι μία σταθερά με  $\varepsilon \ll 1$ . (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $H(t) = \frac{1}{2} \dot{y}^2(t) + \frac{1}{2} y^2(t) + \frac{\varepsilon}{6} y^6(t)$  είναι σταθερή (αναλλοίωτη). (β) Να δώσετε τη προσέγγιση 1<sup>ης</sup> τάξεως της λύσης με αρχική συνθήκη  $y(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  με τη μέθοδο Poincare-Lindstedt (χρησιμοποιήστε τον τύπο  $\cos^5(x) = \frac{1}{16} \cos(5x) + \frac{5}{16} \cos(3x) + \frac{5}{8} \cos(x)$ ).

**Θέμα 4<sup>ο</sup>:** Έστω ράβδος μήκους  $L = 1 \text{ m}$ , φτιαγμένη από ομογενές υλικό με συντελεστή μεταφοράς θερμότητας  $k = 4 \frac{\text{kg m}}{\text{K s}^3}$ , πυκνότητα  $\rho = \sqrt{2} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  και θερμοχωρητικότητα

$C_p = 2\sqrt{2} \frac{\text{m}^2}{\text{K s}^2}$ . Τα άκρα της ράβδου διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία  $300 \text{ K}$ .

Αν τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η θερμοκρασία της ράβδου στη θέση  $z(m)$  είναι  $T(0, z) = A + 10 \sin(\pi z)$ , όπου  $A$  κατάλληλη σταθερά, να δοθεί η πρόβλεψη για τη θερμοκρασία της ράβδου σε χρόνο  $t = 2 \text{ s}$  στη θέση  $z = 0.5 \text{ m}$ .

Καλή επιτυχία!