

Εξέταση στην «Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα» (01/2016)

**Θέμα 1.** (2 Βαθμοί) (α) Έστω  $0 \neq x$ , η λύση του συστήματος  $Ax=b$ , όπου  $A$   $n \times n$  αντιστρέψιμος πίνακας και  $x, b$  διανύσματα. Αν  $x+\delta x$  είναι η λύση του διαταραγμένου συστήματος  $A(x+\delta x)=b+\delta b$ , να δείξετε

$$\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

(β) Έστω πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{2016 \times 2016}$  θετικά ορισμένος, συμμετρικός, με ιδιοτιμές που περιέχονται στο διάστημα  $[5, 100]$ , και διάνυσμα  $b = [1, 1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{2016}$ . Αν  $x$  είναι η ακριβής λύση του συστήματος  $Ax=b$ , και  $x+\delta x$  είναι η λύση του διαταραγμένου συστήματος  $A(x+\delta x)=b+\delta b$ , με  $\delta b = [10^{-6}, 10^{-6}, \dots, 10^{-6}] \in \mathbb{R}^{2016}$  να βρεθεί μία εκτίμηση σφάλματος για την ποσότητα  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ .

**Θέμα 2** (3 Βαθμοί) (α) Για το σύστημα  $Ax=b$  με  $b=[4, 8, -9]^T$  και

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

να κατασκευάσετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης που αντιστοιχεί στην μέθοδο Jacobi (**JOR**) ως στάσιμη επαναληπτική διαδικασία Richardson ( $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k Q^{-1} r^{(k)}$ , όπου  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ ,  $a_k = a$ ). Να μορφοποιήσετε υπολογιστικά τον αλγόριθμο (**JOR**) ως στάσιμη επαναληπτική διαδικασία Richardson (χωρίς αντιστροφή πινάκων). Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης  $a$ , για τις οποίες η **JOR** συγκλίνει. Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης για τις οποίες η **JOR** να συγκλίνει ταχύτερα από την αρχική μέθοδο Jacobi;

(β) Για το σύστημα του ερωτήματος (α) να μελετήσετε την σύγκλιση της μεθόδου χαλάρωσης που αντιστοιχεί στην Gauss-Seidel (**SOR**). Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης για τις οποίες η **SOR** συγκλίνει ταχύτερα από την Gauss-Seidel.

**Θέμα 3** (3 Βαθμοί) (α) Για το σύστημα του ερωτήματος 2(α), να ορίσετε την μέθοδο των κλίσεων ως επαναληπτική διαδικασία Richardson.

(β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο  $\|e^{(k+1)}\| \leq \frac{k_2(A)-1}{k_2(A)+1} \|e^{(k)}\|$  να βρεθεί το πλήθος

των επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο από  $10^{-5}$ . (Δίνεται η λύση του συστήματος  $x=[1, 1, -1]^T$ ).

(γ) Ο αλγόριθμος των συζυγών κλίσεων για συμμετρικούς και θετικά ορισμένους πίνακες κατασκευάζεται ως εξής:

1. Ορίζουμε:  $x^{(0)}, r^{(0)} = b - Ax^{(0)}, p^{(0)} = r^{(0)}$ .

2.  $a_k = p^{(k)T} r^{(k)} / p^{(k)T} A p^{(k)}$

3.  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k p^{(k)}$

4.  $r^{(k+1)} = r^{(k)} - a_k A p^{(k)}$

5.  $\beta_k = (A p^{(k)})^T r^{(k+1)} / (A p^{(k)})^T p^{(k)}$

6.  $p^{(k+1)} = r^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}$

Να δείξετε ότι το καινούριο υπόλοιπο  $r^{(k+1)}$  είναι κάθετο στην κατεύθυνση  $p^{(k)}$ , και ισοδύναμα ότι το  $p^{(k+1)}$  είναι κάθετο στο  $r^{(k+1)}$ .

**Θέμα 4** (2 Βαθμοί) (α) Να υπολογίσετε μία προσέγγιση της μέγιστης (κατά μέτρο) ιδιοτιμής του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

χρησιμοποιώντας 2 επαναλήψεις της μεθόδου των δυνάμεων χρησιμοποιώντας ως αρχικό διάνυσμα το  $x^{(0)} = [1, 0, 0]^T$ .

(β) Να ορίσετε το πηλίκο Rayleigh, και με τη βοήθεια του να βελτιώσετε την εκτίμηση της πρώτης ιδιοτιμής του ερωτήματος (α).

**Διάρκεια εξέτασης:** 2 ώρες και 30 λεπτά.

**Καλή επιτυχία.**