

**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ II & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ»**  
**Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.**  
**02/2016**

**Θέμα 1: (1 βαθμός)** Για την άμεση μέθοδο του Euler,  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$  να ορίσετε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης-αποκοπής (truncation error)  $T_n$  και να αποδείξετε ότι  $|T_n| \leq T = \frac{1}{2} h \max_{a \leq x \leq b} |y''(x)|, n = 0, \dots, N-1$ . Υποθέστε ότι η λύση  $y$  είναι ομαλή. ell L

- **Θέμα 2: (3 βαθμοί)** Να εξετάσετε τις ακόλουθες πολυβηματικές μεθόδους ως προς τη μηδενική ευστάθεια και συνέπεια:

(1)  $y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 2h(f_{n+2} + f_{n+1})$  ~

(2)  $y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με  $f_i = f(x_i, y_i)$ .

(β) Είναι οι παραπάνω μεθοδολογίες συγκλίνουσες; Αν ναι, ποια είναι η μέγιστη δυνατή τάξη σύγκλισης για τις παραπάνω μεθόδους; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Θέμα 3 (3 βαθμοί) :** (α) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές της παραμέτρου  $a$ , ώστε η μέθοδος

$$y_{n+1} = y_n + h(af_n + (1-a)f_{n+1}),$$

$$a \in [0, 1]$$

να είναι συγκλίνουσα. ~

(β) Για τιμή τις παραμέτρου  $a=1/2$  να υπολογίσετε την τάξη σύγκλισης της μεθοδολογίας και να μελετήσετε την Α-ευστάθεια.

Υπενθύμιση:  $C_p = \sum_{j=1}^k \frac{j^p}{p!} \alpha_j - \sum_{j=1}^k \frac{j^{p-1}}{(p-1)!} \beta_j$

(γ) Να εκτελέσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου για το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'(x) = (1/2)y^2, y(0) = 1$$

για τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής τιμής στο 0.1. Για την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης χρησιμοποιείτε δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-

Raphson:  $(x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, x_0 \text{ γνωστό}).$

**Θέμα 4: (2 βαθμοί)** (α) Να ορίσετε την ασθενή λύση (λύση μεθόδου Galerkin) για το ακόλουθο πρόβλημα συνωριακών τιμών:

$$-\frac{d}{dx} \left( (x^2 + 1) \frac{du}{dx} \right) + u(x) = (\pi^2 (x^2 + 1) + 1) \cos(\pi x) + 2\pi x \sin(\pi x) + 2$$

$$u(0) = 3, \quad u(1) = 1$$

(β) Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (με κατάλληλες υποθέσεις για τα δεδομένα  $p(x), r(x), f(x)$ )

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) + r(x)u(x) = f(x)$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B$$

η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Galerkin) όταν εφαρμόζεται με γραμμικές κατά τμήματα βασικές συναρτήσεις (τύπου στέγη) ικανοποιεί την εκτίμηση σφάλματος:

$$\|u - u^h\|_A \leq \frac{h}{\pi} \left\{ \max_{a \leq x \leq b} p(x) + \frac{h^2}{\pi^2} \max_{a \leq x \leq b} r(x) \right\}^{1/2} \|u''(x)\|_{L^2(a,b)}$$

$$\text{όπου } \|f\|_{L^2(a,b)} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Να υπολογίσετε το βήμα  $h$  (ομοιόμορφη διαμέριση) ώστε το σφάλμα να ικανοποιεί τη σχέση  $\|u - u^h\|_A \leq 10^{-2}$  για το πρόβλημα του ερωτήματος (α). Δίνεται  $u(x) = \cos(\pi x) + 2$ .

**Θέμα 5: (1 βαθμός)** Έστω  $r(x), f(x)$ , συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις στο διάστημα  $[a, b]$  και  $r(x) \geq 0$  για κάθε  $a \leq x \leq b$ . Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$-u''(x) + r(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B.$$

να οριστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης με ομοιόμορφη διαμέριση. Στη συνέχεια να δείξετε ότι το γραμμικό σύστημα που προκύπτει έχει λύση.

Καλή επιτυχία.