

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α ΚΑΙ Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Ε Σ

3 Σεπτεμβρίου 2015

Απαντήστε και στα δύο ισοδύναμα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.

ΘΕΜΑ 1ο

- (I) α) Δώστε ένα παράδειγμα ομάδας για κάθε δυνατή δομή ομάδας τάξης n , όπου $n = 4, 5$ και 6 .
β) Έστω $n \in \mathbb{N}$, έστω (C_n, \cdot) η κυκλική ομάδα τάξης n και έστω d διαιρέτης του n . Δείξτε ότι η C_n περιέχει ακριβώς μία υποομάδα τάξης d .
γ) Δώστε όλες τις υποομάδες της ομάδας $(\mathbb{Z}_{40}, +)$.
- (II) Έστω G ομάδα, έστω H υποομάδα της G και έστω $g \in G$.
α) Δείξτε ότι το σύνολο $S = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$ αποτελεί υποομάδα της G .
β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\theta : H \longrightarrow S$ τέτοια ώστε $\theta(h) = g^{-1}hg$ είναι ισομορφισμός.
γ) Έστω K μια πεπερασμένη κυκλική υποομάδα της G η οποία περιέχει και την υποομάδα H και την υποομάδα S . Δείξτε ότι $H = S$.

ΘΕΜΑ 2ο

- (I) α) Γράψτε το στοιχείο $\sigma = (25178)(354)(6235)(18)$ της ομάδας μεταθέσεων S_8 ως γινόμενο ξένων κύκλων. Στη συνέχεια βρείτε την τάξη της σ και την σ^{-1} .
β) Γράψτε την αντιμετάθεση (14) ως γινόμενο στοιχειωδών αντιμεταθέσεων.
γ) Δείξτε ότι για κάθε $n > 2$ το κέντρο $Z(S_n)$ της ομάδας μεταθέσεων S_n περιέχει μόνο την ταυτοτική μετάθεση.
- (II) α) Διατυπώσατε το Θεώρημα Ταξινόμησης Πεπερασμένα Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων.
β) Δώστε όλες τις μη ισομορφικές αβελιανές ομάδες τάξης 40 σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα και στη συνέχεια συμπτύξτε τες κατά το δυνατόν. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
γ) Ταυτοποιήστε την ομάδα-πηλίκο $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{5\mathbb{Z} \times 8\mathbb{Z}}$ στη λίστα που δώσατε στο ερώτημα β).
δ) Κατασκευάστε έναν μη τετραμένο ομομορφισμό ομάδων $\phi : \mathbb{Z}_{40} \rightarrow \mathbb{Z}_{40}$ που να μην είναι ισομορφισμός. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου