

## ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Η ΣΕΜΦΕ (2/3/2015)

**ΘΕΜΑ 1.** (α) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , αν  $(x, y) \neq (0, 0)$  και  $f(0, 0) = 0$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ .

(β) Εξετάστε αν υπάρχει το παρακάτω όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

**ΘΕΜΑ 2.** (α) Έστω η συνάρτηση  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , όπου  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους. Βρείτε τις μερικές παραγώγους της  $f$  σε κάθε  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  και δείξτε ότι η  $f$  είναι διαφορίσιμη.

(β) Έστω  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  και  $x_0 = (1, 2, 3)$ . Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{e}$  για το οποίο η μερική παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  κατά την κατεύθυνση  $\vec{e}$  γίνεται μέγιστη.

**ΘΕΜΑ 3.** (α) Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x, y) = \sqrt{xy}$ . Δείξτε ότι (i) οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της  $f$  στο  $(0, 0)$  είναι και οι δύο μηδέν και (ii) η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

(β) Δώστε τον τύπο του πολυωνόμου Taylor βαθμού 2 με κέντρο ένα  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  μιας συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (η οποία έχει μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης στο  $(x_0, y_0)$ ).

**ΘΕΜΑ 4.** (α) Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 1.$$

Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της  $f$ .

(β) Δίνεται η συνάρτηση  $F(x, y) = x^2 y + 3y^3 x^4 - 4$ . Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $F(x, y) = 0$  ορίζει πεκλεγμένα μια μοναδική συνάρτηση  $y = f(x)$  σε μια περιοχή κάθε σημείου  $(x, y)$  με  $F(x, y) = 0$ . Υπολογίστε την  $f'(1)$ .

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2,5 ΩΡΕΣ