

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3032, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3032, Fax: +30 210 772-3025
[html://www.physics.ntua.gr](http://www.physics.ntua.gr)

Φυσική IV (Κβαντομηχανική I), ΣΕΜΦΕ 4^ο Εξ., Ακ. Έτος 2017

Κανονική Εξέταση

Διδάσκων: Γ. Ζουπάνος

Συνεργάτης: Γ. Πατέλλης

Τρίτη 13.6.2017 15:00, Διάρκεια 2,5 ώρες

Θέμα 1. Επιλέξτε να απαντήσετε σε ένα από τα δύο ερωτήματα (A ή B)

A. Θεωρήστε ελεύθερο σχετικιστικό σωματίδιο μάζας m στο κενό. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ της ταχύτητας ομάδας v_g και της φασικής ταχύτητας v_{ph} και να γράψετε τα συμπεράσματά σας (σχολιάστε το αποτέλεσμα σε σχέση με τη φυσική ερμηνεία των δύο ταχυτήων).

B. Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά υπό την επίδραση ενός δυναμικού της μορφής $V(r) = \frac{1}{4}\lambda r^4$, όπου το λ είναι γνωστό, δηλαδή η ολική του ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{4}\lambda r^4$$

- α) Χρησιμοποιώντας την συνθήκη κβάντωσης της στροφορμής του Bohr, $l = n\hbar$ ($n = 1, 2, \dots$), να βρείτε την ολική ενέργεια της n -οστής κατάστασης του σωματιδίου.
β) Έστω ότι το σωματίδιο αποδιεγείρεται από μια κατάσταση n_i σε μία χαμηλότερη ενεργειακά κατάσταση n_f εκπέμποντας ένα φωτόνιο. Να υπολογίσετε τη συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος.

Θέμα 2. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η κατάσταση ενός σωματιδίου μάζας m σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού ($0 < x < L$) περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

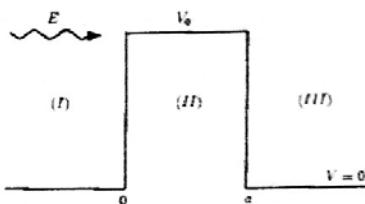
$$\psi(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} & 0 < x < L \\ 0 & x < 0 \text{ και } x > L \end{cases}$$

- α) Υπολογίστε την πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί στην τυχαία κατάσταση n .
β) Γίνεται μέτρηση της ενέργειας και βρίσκεται $E = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$. Ποιά είναι η κατάσταση του σωματιδίου μετά τη μέτρηση;

- γ) Στη συνέχεια διπλασιάζουμε απότομα το πλάτος του πηγαδιού ($0 < x < 2L$). Να βρεθούν οι νέες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος. Ποια είναι η πιθανότητα να μετρήσουμε ενέργεια $E = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ αμέσως μετά τον διπλασισμό του πηγαδιού;
 Υπενθύμιση: $\int \sin^2(kx) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2kx)$

Θέμα 3. Μονοενεργειακή δέσμη σωματιδίων ενέργειας E και μάζας m προσπίπτει από αριστερά σε ένα δυναμικό της μορφής

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ V_0 & , \quad 0 < x < a \\ 0 & , \quad x > a \end{cases}$$



όπου $V_0 > 0$ και $E = V_0$.

- α) Να λυθεί η εξίσωση Schrödinger στις περιοχές (I), (II) και (III)
 β) Να υπολογίσετε το προσπίπτον ρεύμα στην περιοχή (I), $J_{np}^{(I)}$ και το διερχόμενο ρεύμα στην περιοχή (III), $J_{\delta}^{(III)}$.
 γ) Να δειξετε ότι ο συντελεστής διέλευσης είναι

$$T = \frac{4}{4 + \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}}$$

Υπενθύμιση: $J = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^*(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} - \psi(x) \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial x} \right)$

Θέμα 4. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένα σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας ω και περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = N \left(1 + 2 \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

η οποία είναι υπέρθεση των ιδιοκαταστάσεων του αρμονικού ταλαντωτή $\psi_0(x)$ και $\psi_1(x)$

- α) Βρείτε τη διάσταση του συντελεστή N συναρτήσει των διαστάσεων $[m]$, $[\omega]$ και $[\hbar]$.
 β) Υπολογίστε το N ώστε η $\psi(x)$ να είναι κανονικοποιημένη.
 γ) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των τελεστών, υπολογίστε τη μέση τιμή της θέσης για τη χρονική στιγμή t , $\langle \hat{x} \rangle_t$.

Δίνονται: $\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$, $\psi_1(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{3}{4}} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$

Η εξέταση πραγματοποιείται με ανοικτά βιβλία αλλά ΟΧΙ προσωπικές σημειώσεις.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Καλή επιτυχία.