

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3032, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3032, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Φυσική IV (Κβαντομηχανική-I), ΣΕΜΦΕ 4^ο Εξ., Ακ. Έτος 2015-2016

Επαναληπτική εξέταση

Διδάσκων: Γ. Ζουπάνος

Συνεργάτες: Κ. Ντρέκης, Γ. Πατέλλης

Τρίτη 13.09.2016 8:30, Διάρκεια 2.5 ώρες

Θέμα 1.

- A. Θεωρήστε τη σκέδαση ενός ακίνητου ηλεκτρονίου από ένα φωτόνιο μήκους κύματος λ . Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ορμής κατά τους άξονες x και y δείξτε ότι η γωνία ϕ κατά την οποία σκεδάζεται το ηλεκτρόνιο σχετίζεται με τη γωνία σκέδασης του φωτονίου θ μέσω του τύπου

$$\cot \phi = \left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

Υπόδειξη: Ισχύει η σχέση $\tan \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

- B. α) Δείξτε ότι η ταχύτητα v οποιουδήποτε ελεύθερου σωματιδίου με μάζα m συμπίπτει με την ταχύτητα ομάδας v_g του αντίστοιχου κύματος de Broglie.
β) Ποιά είναι η αντίστοιχη φασική ταχύτητα (v_p) και πώς συγκρίνεται με την ταχύτητα ομάδας ;

Σημείωση: Μελετήστε ξεχωριστά για σχετικιστικό και μη-σχετικιστικό σωματίδιο.

Θέμα 2. Οι ϕ_1, ϕ_2 είναι στάσιμες καταστάσεις ενός σωματιδίου με μάζα m σε μονοδιάστατο κουτί $[0, L]$

και οι $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, E_2 = 4\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές της ενέργειας. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στην κανονικοποιημένη κατάσταση

$$\Phi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_2(x)$$

- α) Βρείτε τη μέση τιμή της ορμής του μετά από χρόνο t συναρτήσει της ποσότητας $(\phi_2, \hat{x}\phi_1)$. Υποθέστε ότι η έκφραση $(\phi_2, \hat{x}\phi_1)$ είναι πραγματικός αριθμός.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση $\langle \hat{p} \rangle_t = m \frac{d\langle \hat{x} \rangle_t}{dt}$.

- β) Δείξτε ότι το αποτέλεσμά σας είναι και διαστατικά σωστό, δηλαδή ότι διαστατικά ισούται με $\frac{[m][L]}{[t]}$.

Θέμα 3. Δίνεται ότι η κατάσταση σκέδασης ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται σε δυναμικό $V(x)$, για το οποίο ισχύει $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0$, είναι

$$\psi_k(x) = A \left(\frac{k - ia \tanh(ax)}{k + ia} \right) e^{-ikx}, \quad a > 0$$

- α) Βρείτε την ασυμπτωτική μορφή της $\psi_k(x)$ για $x \rightarrow \pm\infty$ και υπολογίστε τα ρεύματα της πυκνότητας πιθανότητας $j_{\pm\infty}$ χρησιμοποιώντας τη σχέση $j = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x})$.
- β) Να βρείτε την ενέργεια του σωματιδίου και το δυναμικό $V(x)$.

Θέμα 4. α) Χρησιμοποιώντας τη σχέση αβεβαιότητας δείξτε ότι για τις στάσιμες καταστάσεις του απλού αρμονικού ταλαντωτή η μέση τιμή της ενέργειας είναι

$$\langle E \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 (\Delta x)^2$$

Υπόδειξη: Οι στάσιμες καταστάσεις ενός αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} H_n(\sqrt{\lambda}x)$$

όπου $H(x)_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$ τα πολυώνυμα Hermite και $\lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$. Παρατηρούμε ότι $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$, επομένως οι καταστάσεις αυτές έχουν την ιδιότητα συμμετρίας

$$\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$$

Αυτό σημαίνει

για n άρτιο	$\psi_n(-x) = \psi_n(x)$	ψ - άρτια
για n περιπτώ	$\psi_n(-x) = -\psi_n(x)$	ψ - περιπτώ

β) Με δεδομένο ότι για την τυχαία κατάσταση ψ_n είναι $\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$ υπολογίστε το γινόμενο $(\Delta x)(\Delta p)$.

Η εξέταση πραγματοποιείται με ανοικτά βιβλία αλλά ΟΧΙ προσωπικές σημειώσεις.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Καλή επιτυχία.