

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

Ι. Ράπτης, Ν. Τράκας

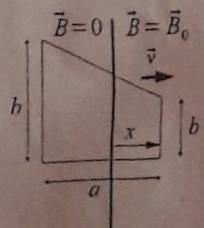
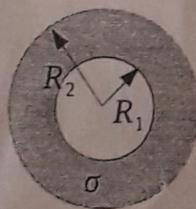
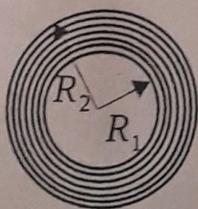
**ΘΕΜΑ 1.** Δύο λεπτές σφαιρικές ομόκεντρες επιφάνειες ακτίνων  $a$  και  $b$  ( $a < b$ ) φέρουν ίσο στατικό φορτίο  $+q$  η κάθε μια ομοιόμορφα κατανομημένο σ'αυτές. (α) Προσδιορίστε το ολικό ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  που προκύπτει από τις δύο κατανομές για  $r < a$ ,  $a < r < b$  και  $r > b$ . (β) Υπολογίστε τη δυναμική ενέργεια  $U$  του συστήματος των δύο κατανομών (δηλαδή την ενέργεια που πρέπει να καταναλωθεί για να σχηματιστεί το σύστημα των δύο κατανομών).

**ΘΕΜΑ 2.** (α) Μονωμένος λεπτός αγωγός τυλίγεται σε επάλληλες κυκλικές σπείρες, ξεκινώντας από έναν αρχικό κύκλο ακτίνας  $R_1$ , και συνεχίζοντας προς τα έξω (με κάθε σπείρα να ακολουπά στην προηγούμενη). Το τελικό σύστημα έχει την μορφή ενός επίπεδου κυκλικού δακτυλίου, με εσωτερική ακτίνα  $R_1$  και εξωτερική  $R_2$ , και σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σπειρών  $N/(R_2 - R_1)$ . Αν διέρχεται από τον αγωγό σταθερό ρεύμα  $I$ , να υπολογίσετε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο συμμετρίας του συστήματος. Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι σε ένα δακτύλιο, μεταξύ των ακτίνων  $r$  και  $r + dr$ , το ρεύμα προέρχεται από μία συνεχή κατανομή σπειρών, και βρείτε το αντίστοιχο ρεύμα  $dI$ . Είναι γνωστό ότι το μαγνητικό πεδίο δακτυλίου ακτίνας  $r$ , που διαρρέεται από ρεύμα  $I$ , σε σημείο του άξονά του που απέχει απόσταση  $z$  από το κέντρο του, είναι ίσο με  $B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r^2}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$ .

(β) Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma$  καταλαμβάνει την επιφάνεια ανάμεσα στις περιφέρειες δύο ομοαξονικών συνεπίπεδων κύκλων με ακτίνες  $R_1$  και  $R_2$ . Η πυκνότητα περιστρέφεται με κατάλληλη κυκλική συχνότητα  $\omega$ , τέτοια ώστε το συνολικό ρεύμα να είναι όσο και το συνολικό ρεύμα  $NI$  του συστήματος των επάλληλων σπειρών του (α)-ερωτήματος. (β1) Να υπολογιστεί η συχνότητα  $\omega$  και το στοιχειώδες ρεύμα  $dI$  που αντιστοιχεί στο διαφορικό δακτυλίδι  $(r, r + dr)$ , (β2) Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο  $B$  στο κέντρο των δύο κύκλων.

**ΘΕΜΑ 3.** Αγώγιμο πλαίσιο σε σχήμα τραπεζίου (βλέπε σχήμα), με  $a = 2 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  $b' = 1 \text{ m}$ , εισέρχεται σε χώρο με σταθερό μαγνητικό πεδίο  $B_0 = 1 \text{ T}$  κάθετο στο επίπεδο του πλαισίου. α) Βρείτε τη μαγνητική ροή που διαρρέει το πλαίσιο ως συνάρτηση της απόστασης  $x$ ; β) Ποια θα πρέπει να είναι η ταχύτητα ως συνάρτηση το  $x$ ,  $v(x)$ , έτσι ώστε η αναπτυσσόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη εξ επαγωγής στο πλαίσιο να είναι σταθερή; Ποια είναι η εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο  $v(t)$ ; Δίνεται η ταχύτητα  $v_0$  με την οποία αρχικά εισέρχεται το πλαίσιο στο χώρο με το μαγνητικό πεδίο (Υπενθύμιση: το εμβαδόν τραπεζίου είναι ίσο με  $(B + \beta)v/2$ ).

**ΘΕΜΑ 4.** Κυλινδρικός πυκνωτής αποτελείται από δύο λεπτούς ομοαξονικούς αγώγιμους κυλινδρικούς φλοιούς ακτίνων  $R$  και  $2R$  και μήκους  $L (\gg R)$  (ώστε να είναι αμελητέα τα φαινόμενα των άκρων). Τα φορτία των δυό φλοιών είναι  $Q(R) = +Q$  και  $Q(2R) = -Q$ , και ο χώρος μεταξύ των φλοιών περιέχει γραμμικό διηλεκτρικό υλικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά που εξαρτάται από την απόσταση  $r$ , από τον άξονα συμμετρίας του συστήματος,  $\epsilon_r = 3R/r$  (για  $R \leq r \leq 2R$ ). (α) Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}_0(r)$ , που θα υπήρχε στο χώρο μεταξύ των φλοιών, αν δεν υπήρχε το διηλεκτρικό, και το αντίστοιχο πεδίο  $\vec{E}(r)$  όταν υπάρχει το διηλεκτρικό. (β) Να υπολογίσετε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των φλοιών, παρουσία του διηλεκτρικού, και την αντίστοιχη χωρητικότητα του πυκνωτή. (γ) Να υπολογίσετε την πόλωση  $\vec{P} = \vec{P}(r)$  του διηλεκτρικού, και τις επιφανειακές πυκνότητες δέσμμιων φορτίων  $\sigma_{1b} = \sigma_b(R)$  και  $\sigma_{2b} = \sigma_b(2R)$ , στα όρια του διηλεκτρικού, και τη χωρική πυκνότητα δέσμμιων φορτίων  $\rho_b = \rho_b(r)$  καθώς και το συνολικό δέσμμιο φορτίο του διηλεκτρικού.



ΓΡΑΨΤΕ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right), \quad V(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \equiv \phi$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(S)} \rho dV = \frac{Q_{\text{περικλ.}}}{\epsilon_0}, \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{E} = -\nabla V, \quad V_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(P_i) \quad U = \frac{1}{2} \int_V V dq = \frac{1}{2} \int_V \rho V dV$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{a} = \mu_0 I_{\text{περικλ.}}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} = M_{12} \quad L_1 = \frac{d\Phi_1}{dI_1} \quad W_M = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = \int \rho(\vec{r}) \vec{r} d^3r, \quad \vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad F_{x(y)(z)} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} E_{x(y)(z)}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E}, \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = K \epsilon_0, \quad \sigma_b = \hat{n} \cdot \vec{P}, \quad \rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Εξισώσεις του Maxwell:  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[ \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right]$$

Πυκνότητες ενέργειας:  $\left\{ \frac{dU_E}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right\} \quad \frac{dU_M}{dV} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \text{Διάνυσμα Poynting: } \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

Μαθηματικές σχέσεις

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{grad } \phi = \nabla \phi = \hat{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\text{curl } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Για σφαιρικά συμμετρικές συναρτήσεις  $V = V(r)$  και  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ , είναι:

$$\text{grad } V = \nabla V = \hat{r} \frac{dV(r)}{dr} \quad \text{και} \quad \text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E(r))$$

Για κυλινδρικά συμμετρικές συναρτήσεις  $V = V(r)$  και  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ , είναι:

$$\text{grad } V = \nabla V = \hat{r} \frac{dV(r)}{dr} \quad \text{και} \quad \text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E(r))$$

Θεώρημα του Gauss:  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{V(S)} \nabla \cdot \vec{E} dV$     Θεώρημα του Stokes:  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{S(C)} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a}$

$$\vec{\nabla} (\phi \vec{\nabla} \phi) = (\vec{\nabla} \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{τοξ} \epsilon \phi \frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2})$$