

ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΚΩΔΙΚΩΝ

Μάρτιος 2008

ΘΕΜΑ 1. (α) Μία πηγή πληροφορίας U παράγει n διαφορετικά σύμβολα u_1, u_2, \dots, u_n με αντίστοιχες πιθανότητες $p(u_1), p(u_2), \dots, p(u_n)$. Να δείξετε ότι για έναν στιγμιαίο κώδικα C ισχύει: $H_r(U) = \frac{H(U)}{\log r} \leq L$.

(β) Μία πηγή πληροφορίας παράγει πέντε διαφορετικά σύμβολα u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 με αντίστοιχες πιθανότητες 0.45, 0.25, 0.15, 0.10, 0.05. Να βρεθεί ο αντίστοιχος δυαδικός κώδικας με τις μεθόδους των Gilbert – Moore και Huffman. Να συγκριθούν οι αποδοτικότητες των δύο κωδίκων.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να δείξετε ότι για $m \geq 1$, ο κώδικας Reed – Muller πρώτης τάξης $C(1, m)$ είναι ένας $(2^m, 2^{m-1}, 2^{m-1})$ δυαδικός κώδικας.

(β) Να δείξετε ότι $A_3(4, 3) = 9$, και να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο κώδικα.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω C ένας δυαδικός γραμμικός κώδικας. Με C_0 συμβολίζουμε τον υποκώδικα του C που αποτελείται από όλες τις κωδικές λέξεις άρτιου βάρους, και με \hat{C} τον επεκταμένο κώδικα. Να δείξετε ότι

$$(i) W_{C_0}(z) = \frac{1}{2}(W_C(z) + W_C(-z))$$

$$(ii) W_{\hat{C}}(z) = \frac{1}{2}((1+z)W_C(z) + (1-z)W_C(-z))$$

(β) Να βρείτε όλους τους δυαδικούς κυκλικούς κώδικες μήκους 4 και να γράψετε τον γεννητήρα πίνακα του καθενός από αυτούς.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω ότι C είναι ο δυαδικός κώδικας Hamming $\text{Ham}(r, 2)$, $r \geq 2$. Να δείξετε ότι:

(i) Η ελάχιστη απόσταση του C είναι 3.

(ii) Ο αριθμός των κωδικών λέξεων βάρους 3 είναι $\frac{n(n-1)}{6}$, όπου $n = 2^r - 1$.

(β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα αναφοράς των συνδρόμων για τον τέλει δυαδικό γραμμικό κώδικα C με γεννητήρα πίνακα

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια να αποκωδικοποιήσετε το διάνυσμα 0000011.

Διάρκεια εξέτασης: $2\frac{1}{2}$ ώρες.