

Εξετάσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης
10 Σεπτεμβρίου 2010

- Θέμα 1** (a) (i) Δώστε τον ορισμό της Hamel βάσης D ενός διανυσματικού χώρου X .
(ii) Έστω D Hamel βάση του X και $D' \subset X$ ώστε το D' είναι γραμμικά ανεξάρτητο και κάθε $y \in D$ είναι γραμμικός συνδιασμός στοιχείων του D' . Δείξτε ότι το D' είναι Hamel βάση του X .
(iii) Έστω D Hamel βάση του X και $y_0 \in D$. Ορίζουμε το ακόλουθο σύνολο

$$D' = \{y_0\} \cup \{y + y_0 : y \neq y_0, y \in D\}$$

Χρησιμοποιώντας το (ii) δείξτε ότι το D' είναι Hamel βάση του X .

- (b) Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι και D Hamel βάση του X .
(i) Άν $T, S : X \rightarrow Y$ γραμμικοί τελεστές με $T(x) = S(x)$ για κάθε $x \in D$, δείξτε ότι $T = S$.

- (ii) Άν $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής με $T[D]$ γραμμικά ανεξάρτητο, τότε ο T είναι 1-1.

- Θέμα 2** (a) Έστω H χώρος Hilbert. Άν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθίες στον H ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ $x_n \perp y_m$ και $x_n + y_n \rightarrow z$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in H$ τέτοια ώστε $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ και $z = x + y$. (Τυρδειξή: Δείξτε ότι οι $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθίες Cauchy.)

- (b) Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ ορθοχανονικό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H και $x \in H$.

Θέτουμε $x' = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. Δείξτε ότι:

- (i) Άν $F = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ τότε $x - x' \perp F$.

$$(ii) \|x'\| = \left(\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \right)^{1/2}.$$

$$(iii) \|x'\| \leq \|x\|.$$

- (c) Βρείτε τον ορθογώνιο υπόχωρο καθενάς από τους παρακάτω υποχώρους του $\ell^2(\mathbb{N})$.

$$(i) F_1 = \langle \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle.$$

$$(ii) F_2 = \langle \{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \rangle.$$

$$(iii) F_3 = \ker f \text{ όπου } f \in \ell^2(\mathbb{N}), f \neq 0.$$

- Θέμα 3** (a) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο της B_X . Ορίζουμε $T : X^* \rightarrow \ell_\infty$ με $T(x^*) = (x^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Αποδείξτε ότι η T είναι γραμμική ισομετρία.

- (b) Για κάθε $t \in [0, 1]$ ορίζουμε $\delta_t : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\delta_t(f) = f(t)$.

- (i) Δείξτε ότι $\delta_t \in (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)^*$ και ότι $\|\delta_t\| = 1$.

- (ii) Δείξτε ότι ο χώρος $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

- (iii) Δείξτε ότι αν $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$, τότε $\bigcap_{n=1}^\infty \ker \delta_{t_n} = \{0\}$.

- Θέμα 4** (a) Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι $x \in X$

$$\|x\| = \sup\{x^*(x) : \|x^*\| \leq 1\}$$

- (b) Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $\|x_n\| = 1$ και για $n \neq m$ $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$.

- (c) Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X με την ακόλουθη ιδιότητα: Κάθε $x^* \in X^*$ ώστε $x^*|_Y = 0$ ισχύει $x^* = 0$. Δείξτε ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X .

Καλή επιτυχία.