



**Στοχαστικές Ανελίξεις  
Εξετάσεις Ιουλίου 2010**

**Ζήτημα 1<sup>ο</sup>.** Παικτης κερδίζει ή χάνει 1€ με πιθανότητα  $p$  και  $q=1-p$  αντίστοιχα.

- (α) Να προσδιορίσετε τη μέση διάρκεια του παιχνιδιού όταν ο παικτης ξεκινά με ποσό  $a€$ , ο αντίπαλος του διαθέτει ποσό  $b€$  και  $p \neq q$ .  
(β) Ποια η μέση διάρκεια του παιχνιδιού όταν  $b = \infty$  και  $p < q$ ?

**Ζήτημα 2<sup>ο</sup>.** Να δειχθούν τα παρακάτω:

- (α) Για τις ιδιοτιμές  $\lambda_j$  ( $j=1,\dots,s$ ) ενός  $(s \times s)$ -στοχαστικού πίνακα  $P$  ισχύει:  $|\lambda_j| \leq 1$ .  
(β) Η μονάδα αποτελεί ιδιοτιμή κάθε στοχαστικού πίνακα  $P$ .  
(γ) Τι συνεπάγεται η ύπαρξη  $k$  ιδιοτιμών  $\lambda_j$  με μέτρο  $|\lambda_j|=1$  όταν  $k > 1$ ;

**Ζήτημα 3<sup>ο</sup>.** Κάθε μία από τις δύο μηχανές που υπάρχουν σε ένα γραφείο τίθεται σε λειτουργία κατά τη διάρκεια μιας ημέρας ανεξαρτήτως της άλλης. Έστω  $X(v)$  ο αριθμός των μηχανών σε λειτουργία κατά τη  $v$ -οστή ημέρα. Δίνεται ότι κάθε μία από τις δύο μηχανές τίθεται σε λειτουργία τη  $v$ -οστή ημέρα με πιθανότητα  $[1+X(v-1)]/4$ ,  $v=1,2,\dots$

- (α) Προσδιορίστε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$ .  
(β) Προσδιορίστε την κατανομή ισορροπίας  $\pi$ .  
(γ) Ποιο το ποσοστό των ημερών κατά τις οποίες και οι δύο μηχανές βρίσκονται σε λειτουργία;

**Ζήτημα 4<sup>ο</sup>.** Θεωρούμε τον τυχαίο περίπατο πάνω στο σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων  $\{0,1,2,\dots\}$  με πιθανότητες μετάβασης  $p_{i,i+2} = v_i$  και  $p_{i,0} = 1 - v_i$  με  $0 < v_i < 1$ , για όλα τα  $i \geq 0$ .

Να εξετάσετε αν υπάρχει κλάση (επικοινωνουσών) επαναληπτικών καταστάσεων και, αν ναι, προσδιορίστε την κατανομή ισορροπίας και τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα  $v_i$  ( $i = 0,1,2,\dots$ ) για την ύπαρξη αυτής.

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 h.

Καλή επιτυχία