

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες):

Έστω $\underline{X} = X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0, \theta)$.

- (α) Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ για το θ .
- (β) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $T(\underline{X})$.
- (γ) Να κατασκευαστεί, με βάση το ερώτημα (β), ένα διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$ για το θ .

ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες):

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}, \quad x \geq \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

- (α) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. της παραμέτρου σ όταν η παράμετρος μ είναι γνωστή.
- (β) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. της παραμέτρου μ όταν η παράμετρος σ είναι γνωστή.
- (γ) Να βρεθεί η εκτιμήτρια με την μέθοδο των ροιών της παραμέτρου $\underline{\theta} = (\mu, \sigma)$ όταν τα μ και σ είναι άγνωστα.

ΘΕΜΑ 3 (3.5 μονάδες):

(Α) Έστω $\underline{X} = X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από τη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ. με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (πιθανοφάνεια):

$$f(\underline{x}; \theta) = g(\theta) \exp(c(\theta)T(\underline{X}))h(\underline{X}).$$

Να αποδείξετε ότι σε συνθήκες κανονικής εκτίμησης ισχύει:

$$E[T(\underline{X})] = -\frac{1}{c'(\theta)} \frac{g'(\theta)}{g(\theta)},$$

όπου $g'(\theta)$ και $c'(\theta)$ είναι οι παράγωγοι ως προς θ των συναρτήσεων g και c αντίστοιχα.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε την $\frac{d}{d\theta} \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}; \theta) d\underline{x}$).

(Β) Έστω τυχαίο δείγμα X_1, \dots, X_n από πληθυσμό με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1$$

όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.

- (α) Να ελέγξετε αν η παραπάνω κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ.
- (β) Με την βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell και του (Α) να βρεθεί Α.Ε.Ε.Δ. για το $1/\theta$.

ΘΕΜΑ 4 (1.5 μονάδες):

Σε τυχαίο δείγμα από 500 εκλογείς μιας χώρας οι 200 υποστηρίζουν το κόμμα Α.

- (α) Να κατασκευαστεί και να υπολογιστεί ένα 96% προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό p των εκλογέων που υποστηρίζουν το κόμμα Α.
- (β) Τι μέγεθος δείγματος πρέπει να έχετε ώστε το εύρος του παραπάνω διαστήματος να είναι το πολύ 5% σε συντελεστή εμπιστοσύνης 0.04;