Εξέταση Πραγματικής Ανάλυσης, 13 Οκτωβρίου 2011

Θέμα 1 (α) Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το γράφημα της f,

$$Grf = \{(x, y) : y = f(x)\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

(β) Βρείτε τις κλειστότητες των παρακάτω συνόλων (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

(1) $A_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(2) $A_2 = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$.

(3) $A_3 = \{(x, y) : x > 0, y \geq 0\}$.

(4) $A_4 = \{(\frac{1}{n}, x) : x \in \mathbb{R}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$.

Θέμα 2 (α) Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση.

(i) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής δείξτε ότι για κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον Y.

(ii) Δείξτε (παραθέτοντας κατάλληλο παράδειγμα) ότι αν η f υποτεθεί συνεχής (αντί ομοιόμορφα συνεχής) τότε δεν ισχύει αντίστοιχο συμπέρασμα.

(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε η σφαίρα $S(x, \varepsilon_x)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό.

Θέμα 3 (α) Έστω (X, ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:

(i) Αν $(C_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, τότε $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.

(ii) Κάθε ακολουθία στον X έχει υπακολουθία που συγκλίνει.

(β) Αν F, G είναι συμπαγή μη κενά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ) δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in F$ και $y_0 \in G$ ώστε $\rho(F, G) = \rho(x_0, y_0)$ (όπου $\rho(F, G) = \inf\{\rho(x, y) : x \in F, y \in G\}$).

Θέμα 4 (α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F : X \to \mathbb{R}^n$ με $F(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ είναι συνεχής.

(β) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ συνεχείς συναρτήσεις με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$, υπάρχουν $1 \leq i, j \leq n$ ώστε $f_i(x) \neq f_j(x)$. Δείξτε ότι υπάρχει $K \subset \mathbb{R}^n$ και συνάρτηση $F : X \to K$ που να είναι ομοιομορφισμός (1-1 και αμφισυνεχής).

Θέμα 5 (α) (i) Διατυπώστε το Θεώρημα Baire και αποδείξτε ότι αν (X, ρ) είναι πλήρης μ.χ. και $X = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ όπου κάθε K_n είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε υπάρχει n_0 ώστε $(K_{n_0})^o \neq \emptyset$.

(ii) Δείξτε ότι αν ο (X, ρ) είναι πλήρης και αριθμήσιμος, έχει ένα τουλάχιστον μεμονωμένο σημείο.

(β)(i) Έστω (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και K ένα κλειστό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι ο $(K, \rho|_K)$ είναι πλήρης.

(ii) Έστω $A \subset \mathbb{R}$ χωρίς μεμονωμένα σημεία. Δείξτε ότι το $\overline{A}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Καλή επιτυχία!