

Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης, 16/6/2010

Θέμα 1 (i) Δίνονται τα σύνολα

$$A = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}, \quad B = \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$$

Δείξτε ότι τα A, B είναι κλειστά υποσύνολα του (\mathbb{R}^2, ρ_2) και ότι $\text{dist}(A, B) = 0$, όπου $\text{dist}(A, B) = \inf\{\rho_2(x, y) : x \in A \text{ και } y \in B\}$.

(ii) Βρείτε τις κλειστότητες των ακόλουθων συνόλων

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q} \text{ και } 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

$$B = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x > 0\}.$$

(iii) Έστω $X = (0, +\infty)$ με την συνήθη μετρική. Δείξτε ότι το $F = (0, 1]$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X και όχι συμπαγές.

(iv) Έστω $0 < a < b < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$[x_0, \infty) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (na, nb)$$

Θέμα 2 Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.

(i) Δώστε τον ορισμό του οριακού σημείου ενός συνόλου A και του κλειστού υποσυνόλου.

(ii) Δείξτε ότι το $F \subset X$ είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα οριακά του σημεία.

(iii) Αν $A \subset X$ και $x \in \bar{A} \setminus A$ δείξτε ότι υπάρχει $(x_n)_n \subset A$ με $x_n \rightarrow x$.

(iv) Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $(x_n)_n \subset X$ πυκνό ώστε $f(x_n) \rightarrow 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$ που δεν είναι μεμονομένο σημείο $f(x) = 0$.

Θέμα 3 Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(i) Δείξτε ότι το $f[X]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R} .

(ii) Διατυπώστε και αποδείξτε το Λήμμα του Lebesgue.

(iii) Δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφα συνεχείς συνάρτησης και δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4 Έστω X ένα μη κενό σύνολο.

(i) Αν $(f_n)_n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, δώστε τον ορισμό της κατά σημείο και της ομοιόμορφης σύγκλισης της $(f_n)_n$ στην f .

(ii) Δώστε παράδειγμα μιας ακολουθίας συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο και δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

(iii) Έστω X άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, κατά σημείο φραγμένες. Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ και υπακολουθία $(f_{n_k})_k$ ώστε να συγκλίνει κατά σημείο στην f .

(iv) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς και $D \subseteq X$ πυκνό ώστε $(f_n|_D)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f|_D$. Δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε όλο τον X .