

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

### ΘΕΜΑ 1 (3 μονάδες):

- (A) Έστω ότι στο στατιστικό μοντέλο  $\{X, \mathcal{X}, f(x; \theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$  πληρούνται οι συνθήκες κανονικής εκτίμησης και έστω  $U = u(X) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X; \theta)$ .
- (i) Να ορίσετε την πληροφορία κατά Fisher, έστω  $I(\theta)$ , παρεχόμενη από την τ.μ.  $X$  σχετικά με την παράμετρο  $\theta$ .
  - (ii) Να αποδείξετε ότι  $E[U] = 0$ .
  - (iii) Να αποδείξετε ότι  $I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X; \theta)\right], \theta \in \Theta$ .
- (B) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την εκθετική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή  $\theta$ . Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του  $\theta$ , έστω  $\hat{\theta}$ , και εν συνεχεία με την βοήθεια της ανισότητας Cramér-Rao, να δείξετε ότι το  $\hat{\theta}$  είναι Α.Ε.Ε.Δ. του  $\theta$ .

### ΘΕΜΑ 2 (4 μονάδες):

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0, \theta]$ , όπου  $\theta > 0$  άγνωστη παράμετρος.

- (i) Ανήκει η παραπάνω κατανομή στην Εκθετική Οικογένεια Κατανομών;
- (ii) Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το  $\theta$ . Άνευ απόδειξης θεωρήστε ότι η εν λόγω επαρκής στατιστική συνάρτηση είναι και πλήρης για το  $\theta$ .
- (iii) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του  $\theta$ , έστω  $\hat{\theta}$ .
- (iv) Να βρεθεί η σ.π.π. του  $\hat{\theta}$ .
- (v) Να βρεθεί η μεροληφθία του  $\hat{\theta}$  και εν συνεχεία χρησιμοποιώντας το  $\hat{\theta}$  να βρεθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta$ .
- (vi) Με την βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell να βρεθεί Α.Ε.Ε.Δ. για το  $\theta$ .

### ΘΕΜΑ 3 (3 μονάδες):

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x; \theta) = 5\theta x^4 e^{-\theta x^5}, \quad x > 0 \text{ και } \theta > 0 \text{ άγνωστη παράμετρος.}$$

- (i) Αποδείξτε ότι η  $T = \sum_{i=1}^n X_i^5$  είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση του  $\theta$ .
- (ii) Αποδείξτε ότι  $Y_i = 2\theta X_i^5 \sim X_2^2, i = 1, \dots, n$ .
- (iii) Κατασκευάστε ένα 95% Δ.Ε. για το  $\theta$ .

\*Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ ώρες\*

EYXOMAI EΠITYXIA