

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ - ΣΕΜΦΕ, 18/06/09

ZHTHMA 1. Ας υποθέσουμε ότι τα σύμβολα της γλώσσας του προτασιακού λογισμού είναι ο σύνδεσμος \rightarrow , η σταθερά (σύνδεσμος 0-θέσεων) F , οι προτασιακές μεταβλητές και οι παρενθέσεις. Δώστε τον επαγωγικό ορισμό του προτασιακού τύπου. Διατυπώστε και αποδείξτε σ' αυτή τη γλώσσα το θεώρημα της μοναδικής αναγνωσιμότητας.

Είναι ή όχι το σύνολο $\{\rightarrow, F\}$ επαρκές και γιατί;

ZHTHMA 2. 1) Σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα εξηγήστε πότε η εμφάνιση μιας μεταβλητής είναι δεσμευμένη και πότε ελεύθερη. Πότε μια μεταβλητή x στον τύπο ϕ είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t ; Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t στον τύπο ϕ και ο τύπος $\forall x \phi \rightarrow \phi(t/x)$ δεν είναι έγκυρος.

2) Θεωρήστε τη γλώσσα $\mathcal{L} = \{<, =\}$, όπου $<$ είναι σύμβολο κατηγορήματος 2-θέσεων. Γράψτε δύο προτάσεις ϕ_1 και ϕ_2 της \mathcal{L} ώστε κάθε ερμηνεία A της \mathcal{L} που ικανοποιεί τις προτάσεις αυτές να είναι αυστηρή μερική διάταξη (δηλ. η $<^A$ είναι μη-αυτοπαθής και μεταβατική). Δώστε παραδείγματα πεπερασμένων και άπειρων μοντέλων του συνόλου $\{\phi_1, \phi_2\}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$: γράψτε μια πρόταση ϕ έτσι ώστε κάθε ερμηνεία της \mathcal{L} που την ικανοποιεί να έχει τουλάχιστον n (το πλήθος) στοιχεία. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το θεώρημα της συμπάγειας αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο προτάσεων Σ ώστε αν A είναι ερμηνεία της \mathcal{L} τότε

A μοντέλο του $\Sigma \Leftrightarrow A$ είναι πεπερασμένη αυστηρή μερική διάταξη.

ZHTHMA 3. Είμαστε στον προτασιακό λογισμό και υποθέτουμε ότι στη γλώσσα μας έχουμε μόνον το σύμβολο συνδέσμου για το συνεπάγεται, δηλαδή \rightarrow . Γράψτε τα αξιώματα και τους κανόνες στο σύστημα των ακολουθητικών του Gentzen που αντιστοιχούν στο \rightarrow . Έστω τώρα ϕ μια ταυτολογία για την κατασκευή της οποίας έχει χρησιμοποιηθεί μόνον ο σύνδεσμος \rightarrow . Δώστε αναλυτική απόδειξη του ότι τότε θα υπάρχει μια απόδειξη του ακολουθητικού $\vdash \phi$ στο σύστημα Gentzen που ορίσατε.

ZHTHMA 4. Διατυπώστε το θεώρημα της απαγωγής για τον κατηγορηματικό λογισμό (για το σύστημα τύπου Hilbert). Με τη βοήθεια αυτού του θεωρήματος αποδείξτε ότι $\vdash \forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi)$, δηλαδή ότι $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi)$ έχει μια τυπική απόδειξη στον κατηγορηματικό λογισμό. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\models \forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi)$ και γιατί;

Ισχύει πάντα ότι $\models (\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \rightarrow \psi)$; (Υπόδειξη: Πάρτε $\phi \equiv R(x)$ και $\psi \equiv Q(x)$, όπου R και Q σύμβολα κατηγορημάτων μίας θέσης και κατασκευάστε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.)

ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2.30 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!