

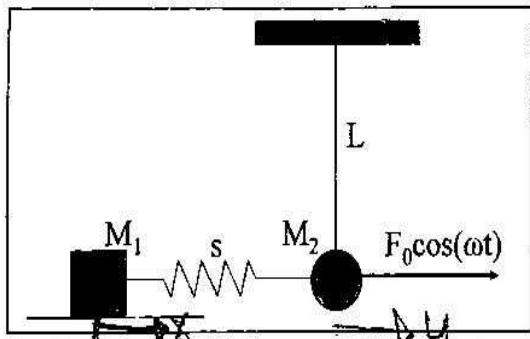
## Σχολή Ε.Μ.Φ.Ε – ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ (ΚΥΜΑΤΙΚΗ)

Επαναληπτικές Εξετάσεις Χειμερινού εξαμήνου 2008-2009

15/09/2009

Διάρκεια εξέτασης 2:30

I. Σ. Ράπτης, E. Φωκίτης

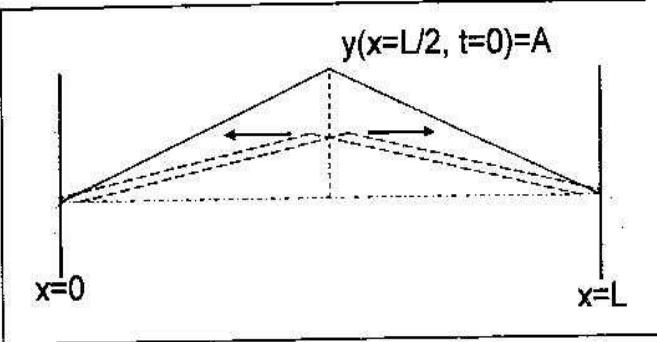


**Θέμα 1.** Σημειακή μάζα  $M_1$  βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, επί του οποίου μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές. Η μάζα αυτή είναι συνδεδεμένη, μέσω ελατηρίου σταθεράς  $s$ , με σημειακή μάζα  $M_2$  η οποία κρέμεται από ακλόνητη οροφή με αβαρές και μη εκτατό νήμα μήκους  $L$ , μέσα σε πεδίο βαρύτητας ( $g$ ). Στην μάζα  $M_2$  ασκείται οριζόντια δύναμη της μορφής  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ , ώστε οι δύο μάζες να εκτελούν κινήσεις μικρού πλάτους.

- (α) Γράψτε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης των δύο μαζών.
- (β) Υποθέστε ότι, στη μόνιμη κατάσταση κίνησης, οι δύο μάζες κινούνται με την συχνότητα της διέγερσης  $\omega$  και με διαφορετικά πλάτη,  $x_1 = A \cos(\omega t)$  και  $x_2 = B \cos(\omega t)$ , και αντικαθιστώντας στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης, γράψτε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που ικανοποιούν τα πλάτη  $A$  και  $B$ .
- (γ) Λύστε το γραμμικό σύστημα και υπολογίστε τα πλάτη  $A$  και  $B$ , συναρτήσει των  $\omega^2$ ,  $\omega_{01}^2 = s/M_1$ ,  $\omega_{02}^2 = g/L$  και  $\lambda = M_1/M_2$ .
- (δ) Δείξτε ότι και τα δύο πλάτη  $A$  και  $B$  τείνουν στο άπειρο, για δύο τιμές,  $\omega_1$  και  $\omega_2$  της συχνότητας διέγερσης και υπολογίστε τις  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , συναρτήσει του  $\omega_{01}$ , αν  $\omega_{02} = 0.5 \omega_{01}$  και  $\lambda = 0.75$ .
- (ε) Εξηγείστε τη σχέση που έχουν οι  $\omega_1$  και  $\omega_2$  με τις ιδιοσυχνότητες του συζευγμένου συστήματος.

**Θέμα 2.** Μια τετραγωνική μεμβράνη, (που εκτείνεται παράλληλα στο επίπεδο x-y, από  $x=0$ , μέχρι  $x=L$  και από  $y=0$ , μέχρι  $y=L$ ), έχει επιφανειακή πυκνότητα μάζας  $\sigma$ , βρίσκεται υπό ισότροπη τάση  $T$  ανά μονάδα μήκους και έχει ακλόνητες και τις τέσσερις πλευρές της.

- (α) Γράψτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης της μεμβράνης με τη μορφή γινομένου, ως  $z(x, y, t) = X(x)Y(y) \cos(\omega t)$ , και βρείτε τις γενικές λύσεις  $X(x)$  και  $Y(y)$ .
- (β) Επιβάλλετε τις συνοριακές συνθήκες ακίνησίας των τεσσάρων πλευρών της μεμβράνης και βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις ταλάντωσης  $u_{nm} = X_n(x)Y_m(y)$  και τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης  $\omega_{nm}$  της μεμβράνης.
- (γ) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος, που συνδέει τα σημεία  $(0,0)$  και  $(L,L)$  του τετραγώνου, είναι δεσμική ευθεία (γεωμετρικός τόπος ακίνητων σημείων, δεσμών), εκείνων των τρόπων ταλάντωσης που αντιστοιχούν στο συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων  $u_{nm} - u_{mn}$ .



**Θέμα 3.** Ιδανική χορδή γραμμικής πυκνότητας  $\rho = \frac{dm}{dx} = \sigma \tau a \vartheta$ , και μήκους  $L$ , είναι τεντωμένη με τάση  $T$  και τα δύο άκρα της ( $x=0$  και  $x=L$ ) κρατούνται ακλόνητα.

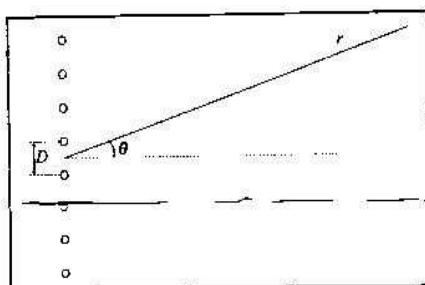
(α) Δείξτε ότι οποιαδήποτε κίνηση της χορδής μπορεί να γραφεί ως επαλληλία κανονικών τρόπων ταλάντωσης  $y_n(x, t) = f_n(x) \cos(\omega_n t)$  και

υπολογίστε τη μορφή των  $f_n(x)$  και τις τιμές των  $\omega_n$ , με βάση τις συνοριακές συνθήκες.

(β) Απομακρύνουμε το μέσο ( $x = L/2$ ) της χορδής κατά απόσταση  $A$  από την κατάσταση ισορροπίας (βλ. σχήμα, συνεχής γραμμή), και, κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , το αφήνουμε ελεύθερο με μηδενική ταχύτητα. Περιγράψτε την κίνηση της χορδής, για  $t > 0$ , με τη μορφή σειράς Fourier, υπολογίζοντας τους συντελεστές φάσης και πλάτους, με βάση τις αρχικές συνθήκες.

(γ) Θεωρήστε ότι η κίνηση της χορδής περιγράφεται, ισοδύναμα, από δύο αντίθετα οδεύοντες παλμούς ίδιας μορφής και μισού ύψους (βλ. σχήμα, διακεκομμένες γραμμές) που ανακλώνται στα σταθερά άκρα

και σχεδιάστε τη μορφή της χορδής κατά τη χρονική στιγμή  $t_1 = \frac{L}{4} \sqrt{\frac{\rho}{T}}$ ,



**Θέμα 4.** Θεωρήστε Ν σημειακές πηγές εκπομπής σφαιρικού κύματος ίδιας συχνότητας  $\omega$ , οι οποίες είναι διατεταγμένες κατά μήκος του άξονα  $y$  σε ίσες αποστάσεις  $D$  μεταξύ τους, και εκπέμπουν σφαιρικά κύματα  $\left( \Psi_n = \frac{A}{r_n} e^{i(kr_n - \omega t)} \right)$  ίδιου πλάτους ( $A$ ), μηδενικής διαφοράς φάσης, στην εκπομπή, και μήκους κύματος  $\lambda$ ,  $\left( k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$ .

(α) Υπολογίστε το συνολικό πλάτος κύματος σε απόσταση  $r$  και σε γωνία  $\theta$ , ως προς τη μεσοκάθετο ( $x$ ) στις πηγές, με τη μορφή αθροίσματος.

(β) Κάντε τις κατάλληλες προσεγγίσεις, για την περίπτωση που  $r \gg ND$  και  $r \gg \lambda$ , ώστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) να υπολογίζεται ως άθροισμα γεωμετρικής σειράς.

(γ) Εκφράστε το αποτέλεσμα του (β) συναρτήσει τριγωνομετρικών συναρτήσεων του  $\delta = \pi \left( \frac{D}{\lambda} \right) \sin(\theta)$ , και υπολογίστε την ένταση του συνολικού κύματος, για τις ίδιες προσεγγίσεις, ( $r \gg ND$  και  $r \gg \lambda$ ), συναρτήσει του  $\theta$ .

## ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΣ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{T/\sigma}$$

$$\cos(A) + \cos(B) = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \int x \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}$$

Άθροισμα γεωμετρικής σειράς Ν όρων:

$$\sum_{n=1}^N a_n s^{n-1} = a_0 \frac{1-s^N}{1-s}$$