ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ στο Μάθημα

ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ και ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Χειμερινό Εξάμηνο 2010-11

Διάρκεια Εξέτασης : 2 ώρες

Το Ζήτημα 1 είναι υποχρεωτικό για όλους.
Από τα υπόλοιπα 4 Ζητήματα επιλέξτε τα 2.

ΖΗΤΗΜΑ 1 (Βαθμός: 4)

(Α) Δείξτε πώς μπορούμε να βρούμε την εκτιμήτρια *Nelson–Aalen* από την εκτιμήτρια *Kaplan–Meier*.

(Β) Τα ακόλουθα δεδομένα αφορούν τη διάρκεια ζωής (T) ασθενών με και χωρίς θεραπεία.

Με θεραπεία										
9	13	(13)	18	23	(28)	31	34	(45)	48	(161)
Χωρίς θεραπεία										
5	(5)	8	(8)	12	(16)	23	27	(30)	33	43

(Οι παρενθέσεις δηλώνουν δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις).

(*i*) Να προσδιοριστεί η εκτιμήτρια *Kaplan–Meier* της συνάρτησης αξιοπιστίας της ομάδας «Με θεραπεία».

(*ii*) Ελέγξτε γραφικά αν στα δεδομένα ταιριάζει ένα μοντέλο παλινδρόμησης της αναλογικής διακινδύνευσης με συμμεταβλητή

$$x = \begin{cases} 1, & \text{με θεραπεία} \\ 0, & \text{χωρίς θεραπεία}. \end{cases}$$

(*iii*) Διαπιστώστε αν η διάρκεια ζωής T των δύο ομάδων είναι της κατανομής *Weibull*.

(Δίνονται: Εκτιμήσεις *Kaplan–Meier* της ομάδας «Χωρίς θεραπεία»)

Χρόνος t_1	Kaplan-Meier	$\ln t_1$
5	0.909091	1.60944
8	0.808081	2.07944
12	0.692641	2.48491
23	0.554113	3.13549
27	0.415584	3.29584
33	0.207792	3.49651
43	0.000000	3.76120

ΖΗΤΗΜΑ 2 (Βαθμός: 3)

Εστω T τ.μ. με συνάρτηση διακινδύνευσης

$$h(t) = \frac{\alpha}{\beta + t}, \quad t > 0, \ \alpha, \ \beta > 0.$$

(i) Βρείτε τη συνάρτηση επιβίωσης $S(t)$ της T. (ii) Βρείτε τη συνάρτηση επιβίωσης της αριστερά κολοβής τ.μ. στο σημείο t_0. (iii) Βρείτε τη μέση υπολειπόμενη διάρκεια ζωής στο σημείο t_0.

ΖΗΤΗΜΑ 3 (Βαθμός: 3)

Έστω τ.μ. T της Λογαριθμο-κανονικής κατανομής. Με βάση ένα δείγμα $t_1, \ldots, t_n$ χωρίς αποκομμένες παρατηρήσεις,

(i) εκτιμήστε τις παραμέτρους μ και σ καθως και τη διάμεσο με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, και

(ii) με βάση τις ακόλουθες μετρήσεις της T: 8, 9, 16, 23, 25, 27, 28, να βρεθούν οι εκτιμήσεις των μ, σ και διαμέσου.

ΖΗΤΗΜΑ 4 (Βαθμός: 3)

(Α) Πώς ορίζεται το μοντέλο παλινδρόμησης του *Cox* ;

(Β) Στα δεδομένα του Ζητήματος 1 προσαρμόζεται ένα μοντέλο της αναλογικής διακινδύνευσης του Cox. Να ελέγξτε αν η διάρκεια ζωής των ασθενών εξαρτάται από το αν έχουν λάβει τη συγκεκριμένη θεραπεία

(i) με τον έλεγχο Wald

(ii) με τον έλεγχο του λόγου των πιθανοφανειών

(Δίνονται: $\hat{\beta} = -.7067698$ και $se(\hat{\beta}) = 0.5654801$, $\ell_1 = -31.066321$).

ΖΗΤΗΜΑ 5 (Βαθμός: 3)

Οι τιμές 12, 11, 4, 7, 2, 5, 8, 5, 7, 1, 6, 19 δείχνουν το χρόνο (ημέρες) μεταξύ διαδοχικών βλαβών $x_i = t_i - t_{i-1}$, $\quad i = 1, \ldots, 12$, $\ t_0 \equiv 0$, ενός ηλεκτρονικού συστήματος.

(i) Θεωρώντας ότι υπό την υπόθεση του σταθερού ρυθμού διακοπών ισχύει $t_i \sim U[0, t_n]$, με t_i ανεξάρτητα μεταξύ τους, βρείτε την ελεγχοσυνάρτηση *Laplace* και την κατανομή της.

(ii) Να εξεταστεί η σταθερότητα του ρυθμού διακοπών με την ελεγχοσυνάρτηση *Laplace*.