

Θέμα 1^ο: α) Να δοθεί η γενική μορφή της σχεδόν γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης με $x = (x_1, x_2, x_3)$ (μον. 0.2)

β) Να προσδιοριστεί ο τόπος της εξίσωσης:

$$(1+x_2^2)u_{x_1x_1} + e^{x_1}u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + 4u = 0, u_{x_1x_1} + x_2u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + u_{x_1} = 0 \quad (\text{μον. 0.4})$$

γ) Λίνεται το πρόβλημα $\Delta u(x) = f(x), x \in D \subset R^3, \frac{\partial u(x)}{\partial \eta} = 0, x \in \partial D, u \in C^2(D \cup \partial D)$, D φραγμένος τόπος, με λειο σύνορο. Α) Να διατυπωθεί και αποδειχτεί η συνθήκη υπό την οποία το πρόβλημα είναι επιλύσιμο. Β) Με αυτή την υπόθεση να δειχτεί ότι το πρόβλημα είναι μοναδικά επιλύσιμο στην μία προσθετική σταθερά. (Υπόδειξη: Λίνεται η πρώτη ταυτότητα του Green

$$\int_D v \Delta u dx = - \int_D \sum_{ij} v_{x_i} u_{x_j} dx + \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds. \quad (\text{μον. 1.7})$$

Θέμα 2^ο: α) Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, 0 \leq r < 5, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi, u(5, \theta, \varphi) = 1 + \cos \theta + 3 \cos^2 \theta.$$

Δίνονται η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0, \text{ και τα πολυόνυμα Legendre}$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \quad (\text{μον. 1.7})$$

β) Να καταγραφούν τα προβλήματα που πρέπει να επιλυθούν, χωρίς να λυθούν, για να βρεθεί η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x_1, x_2) = 4, (x_1, x_2) \in (0, 2) \times (0, 4),$$

$$u(0, x_2) = u(2, x_2) = u(x_1, 0) = 0, u(x_1, 4) = x_1^2 + 8 \quad (\text{μον. 1})$$

Θέμα 3^ο: Εστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} y''(x) + 2y'(x) + \lambda y(x) &= 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) + y(0) &= y(\pi) = 0 \end{aligned}$$

α) Να το γράψετε σε αυτοσυνηγή μορφή. (μον. 0.25)

β) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος. Αποδειξτε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθογώνιες όπως προβλέπεται από τη θεωρία προβλημάτων Sturm-Liouville. (μον. 1.25)

γ) Να δείξετε ότι το μη ομογενές πρόβλημα

$$\begin{aligned} y''(x) + 2y'(x) + \frac{29}{4}y(x) &= \frac{29}{4} + |f(x)|^2 \cos\left(\frac{5x}{2}\right), & 0 < x < \pi \\ y'(0) + y(0) &= y(\pi) = 1 \end{aligned}$$

δεν διαθέτει λύση, όπου $f(x)$ οποιαδήποτε συνάρτηση, συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, που δεν μηδενίζεται ταυτοκά στο διάστημα αυτό. (μον. 1)

Θέμα 4^ο: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= -2e^{-x} \cos t, & x > 0, & t > 0 \\ u(0, t) &= \cos t, & t \geq 0 \end{aligned}$$

$$u(x, 0) = e^{-x} + \frac{x}{1+x^2}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \geq 0.$$

α) Βρείτε τον ημιτονικό μετασχηματισμό $\hat{u}(k, t)$ επακριβώς. (Να προτιμήσετε τη μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης της προκύπτουσας συνήθουσας διαφορικής για την $\hat{u}(k, t)$). (μον. 1.75)

β) Αντιστρέψτε την $\hat{u}(k, t)$ για να βρείτε τη λύση $u(x, t)$. (μον. 0.75)

$$\text{Δίδονται: } \hat{u}(k, t) = \int_0^\infty u(x, t) \sin(kx) dx, \quad u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{u}(k, t) \sin(kx) dk,$$

$$\int_0^\infty e^{-sw} \sin(\lambda w) dw = \frac{\lambda}{\lambda^2 + s^2}, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + s^2} \sin(\lambda w) d\lambda = e^{-sw}, \quad 2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B).$$