



**Θέμα 1<sup>ο</sup>:** α) Να προσδιοριστεί ο τόπος της εξισωσης

$$i) (1+x_1^2)u_{x_1x_1} + x_1^2 u_{x_2x_1} + x_2^2 u_{x_1x_2} + 5u_{x_1} + 4u = 0 \rightarrow$$

$$ii) u_{x_1x_1} + 3u_{x_1x_2} + x_1 u_{x_2x_1} + 2x_2 u_{x_1} = 0 \quad b - \alpha \gamma$$

(μον. 0.5)

β) Να δοθεί ο γενικός τύπος της ημιγραμμικής 2<sup>η</sup> τάξης και ένα παράδειγμα με ανεξάρτητη μεταβλητή

$$\Delta_1(x_1, x_2, x_3) u_{x_1x_2} + b(x, u, u_{x_1}) u_{x_2} + b(x, u, u_{x_1}) u_{x_3} \quad (\muν. 0.25)$$

γ) Αν η  $u(x, t)$  είναι λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών  $u_a(x, t) = u_b(x, t), 0 < x < 3, t > 0, u(x, 0) = h_1(x), u_x(x, 0) = h_2(x), u(0, t) = u(3, t) = 0$ , να δειχθεί ότι η λύση είναι μοναδική. (Υπ.: Χρησιμοποιήστε το ολοκλήρωμα για συνάρτηση  $v(x, t)$ ,  $J(t) = \frac{1}{2} \int_0^3 (c^2 v_x^2 + v^2) dx$ )

(μον. 1)

δ) Δίνεται το πρόβλημα  $\Delta u(x) = g(x), x \in \Omega \subset R^n, u(x) = h(x), x \in \partial\Omega$   $u \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ . Να δειχθεί ότι το πρόβλημα είναι μοναδικά επλύσιμο. (Υπόδειξη: Δίνεται η πρώτη ταυτότητα του Green  $\int v \Delta u dx = - \int \sum_{\Omega} v_{x_i} u_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds$ )

(μον. 1)

**Θέμα 2<sup>ο</sup>:** α) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \phi, t) = u_a, 0 \leq \rho < 4, 0 \leq \phi < 2\pi, t > 0, u(4, \phi, t) = 0.$$

$$u(\rho, \phi, 0) = J_3\left(\frac{\lambda_{32}}{4}\rho\right) \cos 3\phi, u_r(\rho, \phi, 0) = 0$$

$$\text{Δίνεται ο τελεστής Laplace σε πολικές συντ. } \Delta u(\rho, \phi) = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\phi\phi}, \quad (\muν. 1.5)$$

β) Να υπολογιστεί η σταθερά A ώστε το πρόβλημα να είναι επλύσιμο και στη συνέχεια να καταγραφούν τα προβλήματα που πρέπει να επλύσουν

$$\Delta u(\rho, \phi) = \rho^2 \cos \phi, 0 < \rho < 4, 0 \leq \phi < 2\pi \quad \frac{\partial u(4, \phi)}{\partial \rho} = 3 \cos 2\phi + A. \text{ Να δικαιολογηθεί}$$

πλήρως η διαδικασία.  $\int_0^4 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos \phi d\phi d\rho = \int_0^4 3 \cos 2\phi + A d\rho \quad (\muν. 0.75)$

**Θέμα 3<sup>ο</sup>:** Εστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(1+x^4)y''(x) + 4x^3y'(x) + ly(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, y'(0) = y(\pi) = 0.$$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμητικό πλήθος αποκλειστικά θετικών ιδιοτιμών

$$\lambda = \lambda_n, n \in N. \quad (\muν. 1)$$

β) Να δείξετε ότι αν  $y_n, y_m$  είναι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές τότε  $\int_0^\pi (1+x^4) y'_n(x) y'_m(x) dx = 0$ .  $\int_0^\pi f(x) Y_n(x) dx = 0$

γ) Να δείξετε ότι το πρόβλημα  $(1+x^4)y''(x) + 4x^3y'(x) - 6y(x) = 4x^3 - f(x)$ ,  $0 < x < \pi, y'(0) = 1, y(\pi) = \pi$ , έχει μοναδική λύση.  $\int_0^\pi f(x) Y_n(x) dx = 0$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>:** Να επαληφθείστε ότι η συνάρτηση  $G(r) = \frac{\cos r}{4\pi r}$  ικανοποιεί τη διαφορική εξισώση  $\Delta G(r) + G(r) = -\delta(r)$  όπου  $r = r \hat{r}$  το διάνυσμα θέσης στον  $R^3$ . (μον. 1)

β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = e^{-x}, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad \text{Fourier Series} \quad 161$$

$$u_x(0, t) = -e^{-t} + 1, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = -e^{-x}, \quad x \geq 0. \quad 247-252$$

(μον. 1.5)

Υπόδειξη: Αν δουλέψετε με κάποιον μετασχηματισμό Fourier θα χρειαστείτε έναν

$$\text{από τους τύπους } \int_0^\infty e^{-ax} \sin(kx) dx = \frac{k}{k^2 + a^2} \text{ και } \int_0^\infty e^{-ax} \cos(kx) dx = \frac{a}{k^2 + a^2}. \quad \Sigma 13 405$$

$$\begin{aligned} F_1(u)(t) &= \int_0^\infty e^{-itx} u(x) dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-itx} \sin(kx) u(x) dx dk = \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(kx) u(x) dk dt = f_1(u)(t) = -\frac{1}{2} F_1(u)(0) \\ F_2(u)(t) &= \int_0^\infty e^{-itx} u_x(x) dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-itx} \sin(kx) u'(x) dx dk = \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(kx) u'(x) dk dt = f_2(u)(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty u''(x) dx \\ F_3(u)(t) &= \int_0^\infty e^{-itx} u_{xx}(x) dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-itx} \sin(kx) u''(x) dx dk = \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(kx) u''(x) dk dt = f_3(u)(t) = -\frac{1}{2} F_3(u)(0) \end{aligned}$$