

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1 (3.2 μονάδες):

Εστω X μια παρατήρηση από κατανομή με σ.μ.π. $f(x; \theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|} I_{(-1,0,1)}(x)$, $\theta \in (0,1)$.

- (α) Να δειχθεί ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $T_1 = T_1(X) = |X|$ και $T_2 = T_2(X) = 2I_{(1)}(X)$ είναι αμερόληπτοι εκτιμητές του θ .
(β) Με βάση το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα ποιος από τους δύο εκτιμητές πρέπει να προτιμηθεί;
(γ) Με την βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. του θ .
(δ) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του θ .

ΘΕΜΑ 2 (1.8 μονάδες):

(Α) Εστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή μ και γνωστή τυπική απόκλιση σ . Χρησιμοποιώντας το λόγο μεγίστων πιθανοφανειών να κατασκευαστεί κρίσιμη περιοχή K για τον έλεγχο $H_0: \mu = \mu_0$ με εναλλακτική $H_1: \mu \neq \mu_0$ με ε.σ. α , όπου μ_0 γνωστή σταθερά.

Β) Εστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή μ και γνωστή τυπική απόκλιση σ . Να προσδιοριστεί η κρίσιμη περιοχή του Ισχυρότατου Ελέγχου της μηδενικής υπόθεσης $H_0: \mu = \mu_0$ με εναλλακτική $H_1: \mu = \mu_1$ ($\mu_1 < \mu_0$), σε ε.σ. α , όπου μ_0 και μ_1 γνωστές σταθερές.

ΘΕΜΑ 3 (1.8 μονάδες):

Σε ένα πείραμα που επαναλήφθηκε 10 ανεξάρτητες φορές, οι παρακάτω παρατηρήσεις εκφράζουν τον αριθμό των οδηγών, στους 15 που τυχαία επιλέχθηκαν, που φορούσε τη ζώνη ασφαλείας
8, 9, 10, 7, 6, 8, 9, 10, 11, 6.

- (α) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του ποσοστού p των οδηγών που φορούν τη ζώνη ασφαλείας.
(β) Να βρεθεί η μέση τιμή και διασπορά της παραπάνω Ε.Μ.Π.
(γ) Να υπολογιστεί το Cramer-Rao κατώτατο φράγμα του p και να συγκριθεί με την διασπορά της Ε.Μ.Π. που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Τι παρατηρείτε;

ΘΕΜΑ 4 (3.2 μονάδες):

Εστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π. $f(x; \theta) = e^{\theta-x} I_{[\theta, +\infty)}(x)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

- (α) Να δείξετε ότι η στατιστική συνάρτηση $T = \min_{i=1, \dots, n} X_i$ είναι επαρκής για την άγνωστη παράμετρο θ .
(β) Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. T .
(γ) Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = T - \theta$.
(δ) Κατασκευάστε ένα συμμετρικό $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για το θ .

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Διάρκεια εξέτασης $2^{1/2}$ ώρες