

Θεωρία Γραφημάτων

13 Ιουνίου 2018

- Διάρκεια: 2 ½ ώρες.
- Καλή επιτυχία.

Θέμα 1^ο

Ένα **τουρνουά** (*tournament*) είναι ένα πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V$, ακριβώς μία από τις ακμές $(u, v), (v, u)$ ανήκει στο E . Δείξτε ότι σε κάθε τουρνουά με n κορυφές υπάρχει μια κορυφή-βασιλιάς, δηλαδή μια κορυφή u από την οποία υπάρχει μονοπάτι προς οποιαδήποτε άλλη κορυφή μήκους το πολύ δύο.

Θέμα 2^ο

Έστω απλά συνεκτικά γραφήματα G και H . Με $G \times H$ συμβολίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο των G και H .

- Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το γράφημα $G \times H$ να είναι διψερές.
- Εξετάστε για ποιες τιμές του $n \geq 3$ το γράφημα $C_n \times P_n$ είναι επίπεδο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 3^ο

Έστω απλό γράφημα G . Συμβολίζουμε με \overline{G} το συμπληρωματικό γράφημα του G .

- Έστω T ένα δένδρο με n κορυφές. Να δειχθεί ότι το T είναι υπογράφημα του $\overline{C_{n+2}}$.
- Για ποιες τιμές του $n \geq 3$ το $\overline{C_n}$ είναι επίπεδο? Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 4^ο

Έστω συνεκτικό γράφημα G και σκελετικό δένδρο T του G . Με $\ell(T)$ συμβολίζουμε το πλήθος των φύλλων του T (δηλαδή των κορυφών βαθμού 1). Δείξτε ότι για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων r και t με $2 \leq r \leq t$ υπάρχει συνεκτικό γράφημα G τέτοιο ώστε

$$\min\{\ell(T) : T \text{ σκελετικό δένδρο του } G\} = r \text{ και}$$

$$\max\{\ell(T) : T \text{ σκελετικό δένδρο του } G\} = t.$$