

(1)

Nennt
7/5/15Numerische Methoden IAufgabe 4

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/12 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

reduzierte Form
zu verarbeiten

$$|\lambda I - P| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \\ \lambda-1 & \lambda & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \lambda-1 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ \lambda-1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \\ 1 & \lambda & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \lambda + \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \lambda + \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{12} & \lambda + \frac{3}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1) \left\{ (\lambda + \frac{1}{6})(\lambda + \frac{1}{12})(\lambda + \frac{3}{4}) + \frac{1}{4 \cdot 6^2} + \frac{5}{2 \cdot 6^2} + \frac{1}{12}(\lambda + \frac{1}{12}) + \frac{5}{48}(\lambda + \frac{1}{6}) - \frac{1}{16}(\lambda + \frac{3}{4}) \right\} =$$

$$= (\lambda-1) \left[\lambda^3 + \lambda^2 + \left(\frac{1}{6 \cdot 12} + \frac{3}{4 \cdot 12} + \frac{3}{4 \cdot 6} \right) \lambda + \frac{11}{4 \cdot 6^2} + \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{48} - \frac{1}{16} \right) \lambda + \frac{1}{12^2} + \frac{5}{6 \cdot 48} - \frac{3}{4 \cdot 16} \right]$$

$$= \dots = (\lambda-1) \lambda \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$P = U J U^{-1}, \text{ bzw. } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(2)

$$J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^n = U J^n U^{-1} \quad \rightarrow \text{To n εκφάνεται πώς στη μορφή } \left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ ή } n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

επιθυμητές, αντίθετα στην

$$\begin{aligned} \pi_n &= \pi_0 P^n = \pi_0 U J^n U^{-1} \\ &= (\alpha_1 + (\beta_1 n + \gamma_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \alpha_2 + (\beta_2 n + \gamma_2) \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \alpha_3 + (\beta_3 n + \gamma_3) \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \\ &\quad \alpha_4 + (\beta_4 n + \gamma_4) \left(-\frac{1}{2}\right)^n) \end{aligned}$$

$$\pi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

$$\Rightarrow \pi_n(1) = \alpha_1 + (\beta_1 n + \gamma_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\pi_0(1) = \alpha_1 + \gamma_1$$

$$\pi_1(1) = \pi_0(1) \cdot P = \alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\pi_2(1) = \pi_1(1) \cdot P = \pi_0(1) \cdot P^2 = \alpha_1 + (2\beta_1 + \gamma_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

Άλλως: Αφού ως ιδέα νικάρχει, θα κάνει:

$$\pi_{n+1} = \pi_n \cdot P \Rightarrow \pi_* = \pi_* \cdot P, \text{ διότι } \pi_*(1) + \pi_*(2) + \pi_*(3) + \pi_*(4) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \cdot (P) \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = \dots$$

$\Rightarrow \pi_* = \dots$

$$\|\pi_n - \pi_*\| = \left((\beta_1 n + \gamma_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n, (\beta_2 n + \gamma_2) \left(-\frac{1}{2}\right)^n, (\beta_3 n + \gamma_3) \left(-\frac{1}{2}\right)^n, (\beta_4 n + \gamma_4) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

Εάν M για το οποίο λέγεται $|\beta_i| \leq M, |\gamma_i| \leq M$.

$$\text{Τότε } \|\pi_n - \pi_*\| \leq M(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \| (1, 1, 1, 1) \| = C(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3)

Av ois ihozepis iycav $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$, tice $P = U \Lambda U^{-1}$

$$\text{kan } \pi_n = \pi_0 U \Lambda^n U^{-1} = \pi_0 U \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & (\frac{3}{4})^n & & \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n & \\ 0 & 0 & 0 & (-\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$\Rightarrow \pi_n = \left(\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{3}{4}\right)^n + \alpha_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \alpha_4 \left(-\frac{1}{4}\right)^n, \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{3}{4}\right)^n + \beta_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta_4 \left(-\frac{1}{4}\right)^n, \dots, \dots \right)$$

$$\text{Dnde } \|\pi_n - \pi_*\| = \left(\alpha_2 \left(\frac{3}{4}\right)^n + \alpha_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \alpha_4 \left(-\frac{1}{4}\right)^n, \beta_2 \left(\frac{3}{4}\right)^n + \beta_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta_4 \left(-\frac{1}{4}\right)^n, \dots, \dots \right)$$

$$= \left(\frac{3}{4} \right)^n \left(\alpha_2 + \alpha_3 \left(\frac{2}{3}\right)^n + \alpha_4 \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \beta_2 + \beta_3 \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta_4 \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \dots, \dots \right)$$

$$\leq C \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Tenka: $\|\pi_n - \pi_*\| \leq C \cdot \lambda_{\max}$, δou λ_{max} η pisoτη (ekcias arto o δισταγή)

Av ois ihozepis iycav $1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}$, tice $\|\pi_n - \pi_*\| \leq Cn \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Av ois ihozepis iycav $1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$, tice $\|\pi_n - \pi_*\| \leq C \cdot n^2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$

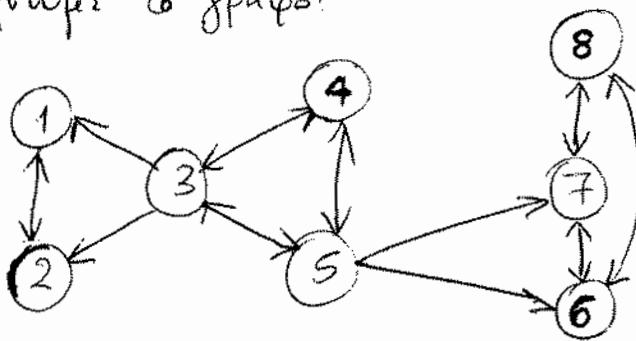
(1)

Λύσεις Φυλλαδίου II

Πέμπτη
7/5/15

Άσκηση 2

Φυλλαράρες σε γράφο:



- a) $G_1 = \{1, 2\}$ κλειστή (+ περιφρένη ⇒ επαναληπτική)
 $G_2 = \{3, 4, 5\}$ ανοιχτή (\Rightarrow παροδική)
 $G_3 = \{6, 7, 8\}$ κλειστή (+ περιφρένη ⇒ επαναληπτική)

b) Αριθ. $\bar{X}_0 = 1$, $P[\bar{X}_n = k] = 0 \quad \forall n \in N, \forall k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Όποις μελετάρεις μόνο την αλυσίδα στην κλίμη G .

Εκτί, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$$\tilde{\pi}_n = \tilde{\pi}_0 \cdot \tilde{P}^n, \text{ έπειτα } \tilde{\pi}_n = (P[\bar{X}_n = 1], P[\bar{X}_n = 2])$$

$$\tilde{\pi}_0 = (1, 0)$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{4}, \text{ έπειτα } \tilde{P}^n = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$\tilde{\pi}_n = \tilde{\pi}_0 \tilde{P}^n = \left(\alpha + \beta \left(\frac{1}{4}\right)^n, \gamma + \delta \left(\frac{1}{4}\right)^n \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } n=0: (1, 0) = (\alpha + \beta, \gamma + \delta) \\ \text{für } n=1: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\alpha + \frac{\beta}{4}, \gamma + \frac{\delta}{4}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{2}{3}, \gamma = \frac{2}{3}, \delta = -\frac{2}{3}$$

Άρα $P[\bar{X}_n = 1] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ και $P[\bar{X}_n = 2] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

(2)

$$\text{Twpa vnoðicarpe } \pi_0 = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$$

$$y) \quad P[T_G < T_{G_3}] = ;$$

$$H h(x) = P[T_G < T_{G_3} | X_0 = x] \text{ Jivu o NET}$$

$Lh(x) = 0$	$x = 3, 4, 5$
$h(x) = 1$	$x = 1, 2$
$h(x) = 0$	$x = 6, 7, 8$

$$\text{fia } x=3: Lh(3) = 0 \Leftrightarrow \sum_y p(x,y) (h(y) - h(3)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} (h(1) - h(3)) + \frac{1}{4} (h(2) - h(3)) + \frac{1}{8} (h(4) - h(3)) + \frac{3}{8} (h(5) - h(3)) = 0$$

$$\Leftrightarrow h(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} h(4) + \frac{3}{8} h(5) \quad (1)$$

$$\text{fia } x=4: Lh(4) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} (h(3) - h(4)) + \frac{3}{4} (h(5) - h(4)) = 0$$

$$\Leftrightarrow h(4) = \frac{1}{4} h(3) + \frac{3}{4} h(5) \quad (2)$$

$$\text{fia } x=5: Lh(5) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} (h(3) - h(5)) + \frac{1}{5} (h(4) - h(5)) + \frac{1}{5} (h(5) - h(5)) + \frac{1}{5} (h(6) - h(5)) + \frac{1}{5} (h(7) - h(5)) = 0$$

$$\Leftrightarrow h(5) = \frac{1}{5} h(3) + \frac{1}{5} h(4) \quad (3)$$

Ak as (1), (2), (3) $\Rightarrow h(3), h(4), h(5) = \dots$

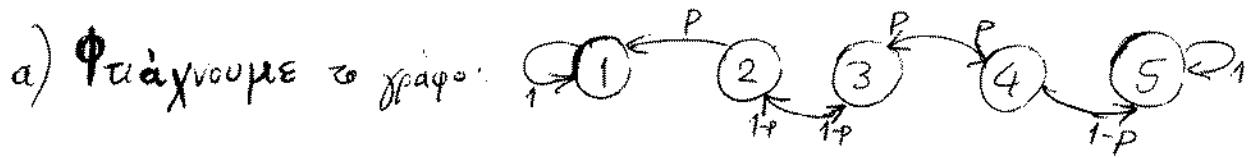
$$\begin{aligned} \text{Orice } P[T_G < T_{G_3}] &= P[T_G < T_{G_3} | X_0 = 3] \cdot P[X_0 = 3] + \\ &\quad + P[T_G < T_{G_3} | X_0 = 4] \cdot P[X_0 = 4] + \\ &\quad + P[T_G < T_{G_3} | X_0 = 5] \cdot P[X_0 = 5] \end{aligned}$$

$$= h(3) \cdot \frac{1}{3} + h(4) \cdot \frac{1}{3} + h(5) \cdot \frac{1}{3}$$

5) H πidavötna sivu n ifra με ερώσυρα (8).

(3)

Άσκηση 4



$$P[T_1 < T_5 | X_0 = s_3] = ; \quad \text{όπου } T_i = \inf\{k \geq 0 : X_k = s_i\}$$

Av $h(k) = P[T_1 < T_5 | X_0 = s_k]$, και $h(k)$ άντει σε ΝΣΤ

$$\begin{cases} Lh(x) = 0 \text{ για } x=2,3,4 \\ h(1) = 1 \\ h(5) = 0 \end{cases}$$

Για $x=2$: $Lh(2) = 0 \Leftrightarrow h(2) = ph(1) + (1-p)h(3)$
 $\Leftrightarrow h(2) = p + (1-p)h(3)$

Για $x=3$: $Lh(3) = 0 \Leftrightarrow h(3) = (1-p)h(2) + ph(4)$

Για $x=4$: $Lh(4) = 0 \Leftrightarrow h(4) = ph(3) + (1-p)h(5)$
 $\Leftrightarrow h(4) = ph(3)$

Προκύπτει $h(3) = (1-p)h(2) + p^2h(3) \Leftrightarrow (1-p)(1+p)h(3) = (1-p)h(2)$
 $\Leftrightarrow h(2) = (1+p)h(3)$

και $(1+p)h(3) = p + (1-p)h(3) \Leftrightarrow 2ph(3) = p \Leftrightarrow h(3) = \frac{1}{2}$

B) Σημείωσε 2 φάσεις σε κίρκεια ←
 Av φάσης $K \rightarrow$ output K
 αλλώς αν φέρεις $\Gamma K \rightarrow$ output Γ
 αλλώς

(1)

Λύσεις Φυλαδίου III

Πόρταγκ

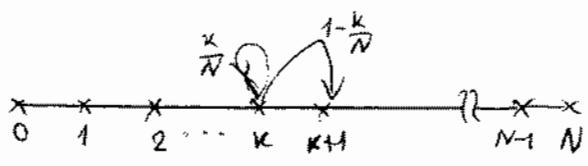
21/5/15

Άσκηση 2

Σ_k = διαγορετική πίτα του έχουμε δοκιμάσει σε κ επιλογές

$$\Sigma_0 = 0$$

$$p(k,j) = \begin{cases} 0, & j \neq k, k+1 \\ \frac{k}{N}, & j = k \\ \frac{1-k}{N}, & j = k+1 \end{cases}$$



$$T_N = \inf \{k \geq 0 : \Sigma_k = N\}$$

$$\mathbb{E}_0[T_N] = \mathbb{E}[T_N | \Sigma_0 = 0] = ;$$

$$g(x) = \mathbb{E}[T_N | \Sigma_0 = x]$$

$$\text{Η } g(x) \text{ θεριζει } \sim \text{ΠΣΤ} \quad \begin{cases} Lg(x) = -1, & x = 0, 1, \dots, N-1 \\ g(N) = 0 \end{cases}$$

$$Lg(x) = -1 \Leftrightarrow \sum_{y \in X} p(x,y) (g(y) - g(x)) = -1$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{x}{N}\right) (g(x+1) - g(x)) = -1$$

$$\Leftrightarrow g(x) - g(x+1) = \frac{N}{N-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\text{Για } x = N-1 : g(N-1) - g(N) = N$$

$$x = N-2 : g(N-2) - g(N-1) = \frac{N}{2}$$

$$x = N-3 : g(N-3) - g(N-2) = \frac{N}{3}$$

$$x = 1 : g(1) - g(2) = \frac{N}{N-1}$$

$$x = 0 : g(0) - g(1) = \frac{N}{N}$$

⊕

$$g(0) = \mathbb{E}[T_N | \Sigma_0 = 0] = N \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} \right) \sim N \log N$$

(Προβλήμα αντίθετη κοντούσιων)

(2)

Άσκηση 3

γ) $S_k = \text{αθροίσμα των } \tilde{\sigma}_k \text{ πους στις } k \text{ πρώτες } \tilde{\sigma}_k$

$$\tilde{\Sigma}_k = S_k \bmod 7$$

$$\tilde{\Sigma}_0 = 0$$

$$T_0^+ = \inf\{k > 0 : \tilde{\Sigma}_k = 0\}$$

Αυτό τον ψάχνουμε είναι το $E[T_0^+]$.

H $\{\tilde{\Sigma}_k\}$ είναι με μηδαμότυπες μεταβλητές

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
1	1/6	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
2	1/6	1/6	0	1/6	1/6	1/6	1/6
3	1/6	1/6	1/6	0	1/6	1/6	1/6
4	1/6	1/6	1/6	1/6	0	1/6	1/6
5	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	1/6
6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0

Σημαντική $p(x,y) = \begin{cases} 0, & y=x \\ \frac{1}{6}, & y \neq x \end{cases}$

$$E[T_0^+] = 1 + \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} E_k[T_0]$$

συλλογή στοιχείων με λύση στη ΣΤ $\left\{ \begin{array}{l} Lg(k) = -1, k=1, \dots, 6 \\ g(0) = 0 \\ g(k) = E_k[T_0] \end{array} \right.$

Άλλως, αριθμούμε με την τρόπη καρδιού J : $p(J,x) = 1/6, x \neq 0$

$$p(J,0) = 0$$

$$p(x,y) = \begin{cases} 0, & y=x, x \neq 0 \\ \frac{1}{6}, & y \neq x, x \neq 0 \end{cases}$$

και υπολογίζουμε το χρόνο πρώτης αφίξης (όχι επισφρούψης) σε 0.

Άλλως: Ο πινακας είναι διπλής συχανικός \Rightarrow αναλογική κα-

νομή για ομοιόμορφη: $\pi(x) = \frac{1}{7}, x=0,1,\dots,6$

$$E[T_0^+] = \frac{1}{\pi(0)} = 7$$

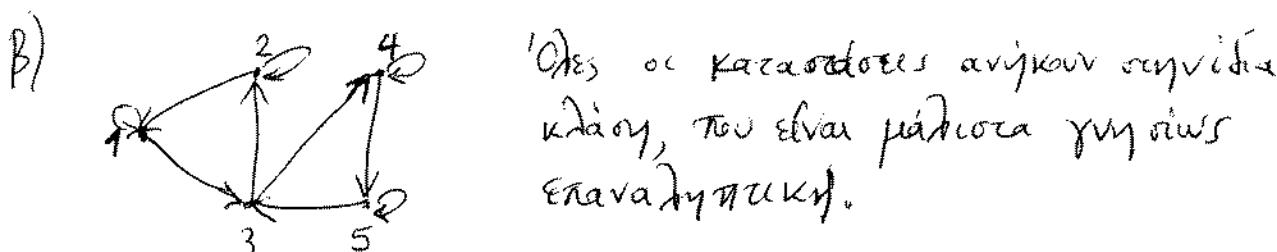
(3)

Άσκηση 4 (Πλατύ θέμα)

a) $\begin{matrix} K & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & K & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & K & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & K & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & K \end{matrix}$

$P =$
τοις υπόκλινοις
πάνω και σεργάτηις

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$



γ) Αν $X_0 = 3$, $P[X_4 = 3 | X_0 = 3] = P_{33}^{(4)} =$

$$P_{33}^{(4)} = \sum_{k=1}^5 P_{3k}^{(2)} P_{k3}^{(2)}$$

$$= \frac{8+8+0+2+2}{81}$$

$$= \frac{20}{81}$$

επιμηδιώσασις

$$P^2 = \begin{bmatrix} & & 2/9 & & \\ & & 4/9 & & \\ 4/9 & 2/9 & 0 & 2/9 & 1/9 \\ & & 1/9 & & \\ & & 2/9 & & \end{bmatrix}$$

δ) $T_5 = \inf\{k \geq 0 : X_k = 5\} \quad E[T_5 | X_0 = 1] =$

H $g(x) = E[T_5 | X_0 = x]$ άνων \Rightarrow ΝΕΤ $\begin{cases} Lg(x) = -1, x = 1, 2, 3, 4 \\ g(5) = 0 \end{cases}$

Για $x=1$: $Lg(1) = -1 \Leftrightarrow \sum_{y \in S} p(1,y) (g(y) - g(1)) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}(g(3) - g(1)) + 0 = -1 \Leftrightarrow g(3) - g(1) = -3/2$

Για $x=2$: $Lg(2) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}(g(1) - g(2)) = -1 \Leftrightarrow g(1) - g(2) = -3/2$

Για $x=3$: $Lg(3) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}(g(2) - g(3)) + \frac{1}{3}(g(4) - g(3)) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}g(2) + \frac{1}{3}g(4) - g(3) = -1$

Για $x=4$: $Lg(4) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(g(5) - g(4)) = -1 \Leftrightarrow g(4) = 3$

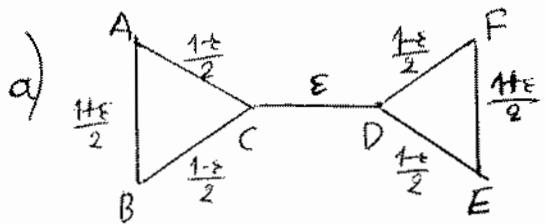
(4)

Ajorcas \Rightarrow avstypa, exupre $g(1) = \frac{27}{2}, g(2) = 15, g(3) = 12, g(4) = 3$

Orde $E[T_5 | X_0 = 1] = g(1) = \frac{27}{2}$.

(5)

Άσκηση 5 (Παράδειγμα)



$$T_\varepsilon = \inf \{m \geq 0 : \Sigma_m \in \{D, E, F\}\}$$

$$\mathbb{E}[T_\varepsilon | \Sigma_0 = x] = ; \quad \text{για } x \in \{A, B, C\}$$

Περιφέρουμε και της περιφύσ $\sim \frac{3}{\varepsilon} + o(1)$, καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\text{H } g(x) = \mathbb{E}[T_\varepsilon | \Sigma_0 = x] \text{ θέτει } \text{π.Σ.Τ} \begin{cases} Lg(x) = -1 & \text{για } x \in \{A, B, C\} \\ g(x) = 0 & \text{για } x \in \{D, E, F\} \end{cases}$$

$$\text{Για } x = A: Lg(A) = -1 \Leftrightarrow \frac{1+\varepsilon}{2}(g(B) - g(A)) + \frac{1-\varepsilon}{2}(g(C) - g(A)) = -1$$

$$\Leftrightarrow (1+\varepsilon)g(B) + (1-\varepsilon)g(C) - 2g(A) = -2 \quad (1)$$

$$\text{Για } x = B: Lg(B) = -1 \Leftrightarrow \frac{1+\varepsilon}{2}(g(A) - g(B)) + \frac{1-\varepsilon}{2}(g(C) - g(B)) = -1$$

$$\Leftrightarrow (1+\varepsilon)g(A) + (1-\varepsilon)g(C) - 2g(B) = -2 \quad (2)$$

$$\text{Για } x = C: Lg(C) = -1 \Leftrightarrow \frac{1-\varepsilon}{2}(g(A) - g(C)) + \frac{1-\varepsilon}{2}(g(B) - g(C)) = -1$$

$$\Leftrightarrow (1-\varepsilon)g(A) + (1-\varepsilon)g(B) - 2g(C) = -2 \quad (3)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow g(A) = g(B) \quad (\text{ο γαρ η σημασία των διόρθωσης})$$

$$(2) \Rightarrow (1-\varepsilon)(g(C) - g(B)) = -2$$

$$(3) \Rightarrow (1-\varepsilon)g(B) - g(C) = -1$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon g(C) &= -3 \Rightarrow g(C) = \frac{3}{\varepsilon}, \quad g(A) = g(B) = \frac{-1+g(C)}{1-\varepsilon} = \frac{3}{\varepsilon(1-\varepsilon)} - \frac{1}{1-\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\text{B) } \phi_\varepsilon(s) = \mathbb{E}[e^{-s\varepsilon T_\varepsilon} | \Sigma_0 = s] = ; \quad \text{για } s \in \{A, B, C\} \quad \text{και } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(s) = \varphi(s) = ;$$

(Αν $\varphi(s) = \mathbb{E}[e^{-s^2}]$ γα κάτια γνωστή κατανοή 2, όταν $\varepsilon T_\varepsilon \xrightarrow{\mathbb{P}} 2$)

$$\phi(s) = 1 \quad \text{για } s \in \{D, E, F\}$$

(6)

$$\text{Av } x \notin \{D, E, F\} : \phi_\varepsilon(x) = \mathbb{E}[e^{-s\varepsilon T_\varepsilon} | X=x]$$

$$= \sum_{y \in \mathbb{X}} p(x,y) \mathbb{E}[e^{-s\varepsilon T_\varepsilon} | X_0=x, X_1=y]$$

$$\begin{aligned} T_\varepsilon &= \inf\{k \geq 1 : X_k \in \{D, E, F\}\} \\ &= 1 + \inf\{k \geq 0 : X_k \in \{D, E, F\}\} \\ &= 1 + T_\varepsilon^Y, \text{ doav } Y_k = \overline{X}_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{y \in \mathbb{X}} p(x,y) \mathbb{E}[e^{-s\varepsilon T_\varepsilon^Y} | X_1=y] \\ Y_k &= \overline{X}_{k+1} \\ &= \sum_{y \in \mathbb{X}} p(x,y) \mathbb{E}[e^{-s\varepsilon(1+T_\varepsilon^Y)} | Y_0=y] \\ &= e^{-s\varepsilon} \sum_{y \in \mathbb{X}} p(x,y) \underbrace{\mathbb{E}[e^{-s\varepsilon T_\varepsilon^Y} | Y_0=y]}_{\phi_\varepsilon(y)} \end{aligned}$$

$$\text{App } \text{ya } x \in \{A, B, C\} : \phi_\varepsilon(x) = e^{-s\varepsilon} \sum_{y \in \mathbb{X}} p(x,y) \phi_\varepsilon(y)$$

Αναστήλωση δηλαδή $\approx \varepsilon \}$ για:

$$\text{Av } \phi(x,s) = \mathbb{E}[e^{-sT_A} | X_0=x] \text{ και } T_A = \inf\{k \geq 0 : X_k \in A\},$$

$$\text{η } \phi(\cdot, s) \text{ θέτει } \approx \text{ πετ } \left\{ \begin{array}{l} \phi(x,s) = e^{-s} \sum_{y \in \mathbb{X}} p(x,y) \phi(y,s), x \notin A \\ \phi(x,s) = 1 \quad \text{για } x \in A \end{array} \right.$$

$$\text{Όποις } \phi_\varepsilon(A) = e^{-s\varepsilon} \left(\frac{1+\varepsilon}{2} \phi_\varepsilon(B) + \frac{1-\varepsilon}{2} \phi_\varepsilon(C) \right) \Rightarrow \phi_\varepsilon(A) = \phi_\varepsilon(B)$$

$$\phi_\varepsilon(B) = e^{-s\varepsilon} \left(\frac{1+\varepsilon}{2} \phi_\varepsilon(A) + \frac{1-\varepsilon}{2} \phi_\varepsilon(C) \right)$$

$$\phi_\varepsilon(C) = e^{-s\varepsilon} \left(\frac{1-\varepsilon}{2} \phi_\varepsilon(A) + \frac{1-\varepsilon}{2} \phi_\varepsilon(A) + \varepsilon \phi_\varepsilon(D) \right) \Rightarrow \phi_\varepsilon(C) = e^{-s\varepsilon} [(1-\varepsilon)\phi_\varepsilon(A) + \varepsilon]$$

$$\text{και } \phi_\varepsilon(A) \left(1 - \frac{1+\varepsilon}{2} e^{-s\varepsilon} \right) = e^{-s\varepsilon} \frac{1-\varepsilon}{2} \phi_\varepsilon(C)$$

$$\Rightarrow \phi_\varepsilon(A) = \phi_\varepsilon(B) = \frac{\frac{1-\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon \cdot e^{-s\varepsilon}}{1 - \frac{1+\varepsilon}{2} e^{-s\varepsilon} - \frac{(1-\varepsilon)^2}{2} e^{-2s\varepsilon}} = \frac{\frac{1-\varepsilon}{2} \varepsilon e^{-s\varepsilon}}{1 - \frac{1+\varepsilon}{2} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{2} + \frac{1+\varepsilon}{2} (1-e^{-s\varepsilon}) + \frac{(1-\varepsilon)^2}{2} (1-e^{-2s\varepsilon})}$$

$$= \frac{\frac{1-\varepsilon}{2} \varepsilon e^{-s\varepsilon}}{\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{1+\varepsilon}{2} \cancel{\varepsilon} \cancel{\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon}} + \frac{(1-\varepsilon)^2}{2} \cancel{\frac{1-e^{-2s\varepsilon}}{\varepsilon}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 0 + \frac{5}{2} + \frac{2s}{2}}$$

$$= \frac{1}{1+3s}$$

⑦

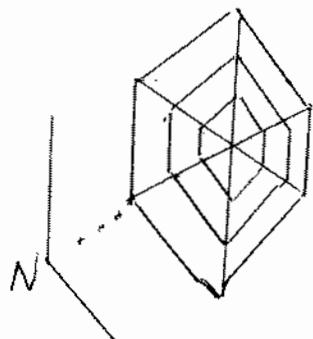
$$\Phi_\varepsilon(\zeta) = e^{-s\varepsilon} \left((1-\varepsilon) \phi_\varepsilon(A) + \varepsilon \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1+3s}$$

$$\text{Ortice } \Phi_\varepsilon(x) = \mathbb{E}[e^{-s\varepsilon T_\varepsilon} | X_0 = x] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{1+3s}}_{\text{γενική παραγωγή της } \exp(3)}, \quad x \in \{A, B, C\}$$

Ortice $X \sim \exp\left(\frac{1}{3}\right)$.

$$\text{Eval } \mathbb{E}[e^{-sX}] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx = \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{1}{3} + s} = \frac{1}{1+3s}$$

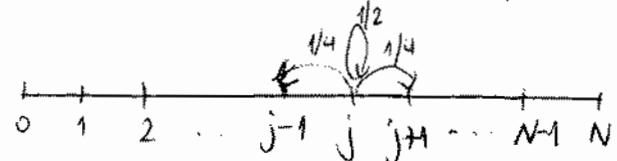
Aσκηση 7



$X_k = j$ αν για αράχνη μετά από k βήματα
βρίσκεται στο j -ο ωρίου εξόδου.

$$\text{Για } j=N: \quad p(N, N-1) = \frac{1}{3}, \quad p(N, N) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Για } 1 \leq j \leq N-1: \quad p(j, j) = \frac{1}{2}, \quad p(j, j-1) = \frac{1}{4}, \quad p(j, j+1) = \frac{1}{4}$$



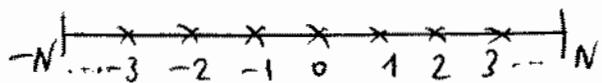
$$\mathbb{E}[T_0 | X_0 = x] = g(x) = ;$$

Η $g(x)$ θίνει ένα ΠΣΤ...

Περιέχει και της τελευταίας της τιμής του N^2 .

Aσκηση 1

16/6/15



$$\mathbb{E}[T_{\{-N, N\}} | X_0 = 0] = ;$$

$$p(0, 1) = p$$

$$p(0, -1) = 1-p$$

$$p(n, n+1) = p$$

$$p(n, -1) = 1-p$$

$$p(-n, -n-1) = 1-p$$

$$p(-n, 1) = p$$

$$n \in \mathbb{N}$$

(8)

$$\text{H } E[T_{\{-N, N\}} | X_0 = x] = g(x) \text{ dívek } \Leftrightarrow \text{DET} \begin{cases} Lg(x) = -1, |x| < N \\ g(N) = g(-N) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Für } x=0: pg(1) + (1-p)g(-1) - g(0) = -1 \Leftrightarrow g(0) = 1 + pg(1) + (1-p)g(-1)$$

$$\begin{aligned} \text{Für } x=n \in N: & p(g(n+1) - g(n)) + (1-p)(g(-1) - g(n)) = -1 \\ & \Leftrightarrow pg(n+1) - g(n) + (1-p)g(-1) = -1 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } x=-n, n \in N: & (1-p)(g(-(n+1)) - g(-n)) + p(g(1) - g(-n)) = -1 \\ & \Leftrightarrow (1-p)g(-(n+1)) - g(-n) + pg(1) = -1 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1): \text{operativ: } pg(n+1) - g(n) = 0$$

$$\text{Für } n \in N: g(n) = \left(\frac{1}{p}\right)^n c$$

$$\begin{aligned} \text{Für } n \in N: & pc - c + (1-p)g(-1) + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow c(1-p) = (1-p)g(-1) + 1 \\ & \Leftrightarrow c = g(-1) + \frac{1}{1-p} \end{aligned}$$

$$\text{Apa für } n \in N: g(n) = \alpha \left(\frac{1}{p}\right)^n + g(-1) + \frac{1}{1-p}$$

$$\text{Kontrolle nach (2): } g(-n) = \beta \left(\frac{1}{1-p}\right)^n + g(1) + \frac{1}{p}$$

$$g(N) = 0 \Leftrightarrow \alpha \left(\frac{1}{p}\right)^N + g(-1) + \frac{1}{1-p} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\left(g(-1) + \frac{1}{1-p}\right) p^N$$

$$g(-N) = 0 \Leftrightarrow \beta = \dots$$

$$\text{Apa } g(n) = -\left(g(-1) + \frac{1}{1-p}\right) p^{N-n} + g(-1) + \frac{1}{1-p} \quad (3)$$

$$g(-n) = -\left(g(1) + \frac{1}{p}\right) (1-p)^{N-n} + g(1) + \frac{1}{p} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (3) \stackrel{n=1}{\Rightarrow} & g(1) = \left(g(-1) + \frac{1}{1-p}\right) (1-p^{N-1}) \quad \left. \Rightarrow g(1) = \dots \quad \text{Operativ aus (3)} \right. \\ (4) \stackrel{n=1}{\Rightarrow} & g(-1) = \left(g(1) + \frac{1}{p}\right) (1-(1-p)^{N-1}) \quad \left. \Rightarrow g(-1) = \dots \quad \text{Kontrolle der Formel aus (4).} \right. \end{aligned}$$

(1)

Ajous Purnadiou IV

Επίτημα

4/6/15

Aσκηση 4

$$p(k, k+1) = \frac{1}{k+1}, \quad p(k, k-1) = \frac{k}{k+1} \quad \mathbb{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Για να βρούμε μια αναλογική κανονεία, θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια $\pi(\cdot)$ που ικανοποιεί τις συδικές ακριβότερες συμπαντίες: $\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{X}$

Ικανοποιείται αυτόπειρα αν $|y-x| \neq 1$.

Αρκει να δούμε για $|y-x|=1$.

$$\pi(k)p(k, k+1) = \pi(k+1)p(k+1, k) \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \pi(k) \cdot \frac{1}{k+1} = \pi(k+1) \cdot \frac{k+1}{k+2} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \pi(k+1) = \frac{k+2}{(k+1)^2} \pi(k) \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$k=0: \quad \pi(1) = \frac{2}{1^2} \pi(0)$$

$$k=1: \quad \pi(2) = \frac{3}{2^2} \pi(1)$$

$$k=2: \quad \pi(3) = \frac{4}{3^2} \pi(2)$$

⋮

$$k=n-1: \quad \pi(n) = \frac{n+1}{n^2} \pi(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \pi(n) = \pi(0) \frac{(n+1) \cdot n!}{(n!)^2}$$

$$\Rightarrow \pi(n) = \pi(0) \frac{n+1}{n!}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) = \pi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \pi(0) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right)$$

$$= \pi(0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) = \pi(0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) \\ = \pi(0) (e+e) = 2e\pi(0)$$

(2)

Άρα για $\pi(\cdot)$ είναι αναλλοίωτη κατανομή:

$$\pi(n) = \frac{1}{2e} \frac{n+1}{n!} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{είναι κατανομή σε } X \\ \text{κανονούσι τις ανθηκές ακριβώς (coefficient)} \end{matrix}$$

Η π με $\pi(n) = \frac{1}{2e} \frac{n+1}{n!}$ είναι η π. προσβάσιμη αναλλοίωτη

κατανομή, γιατί η αλυσίδα είναι μη υποβεβαία.

Είναι επίσης γνήσια επαναληγυρική, γιατί είναι μη υποβεβαία και έχει αναλλοίωτη κατανομή.

$$X_0 = 5$$

$$T_5^+ = \inf \{k > 0 : X_k = 5\}$$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{T_5^+} \mathbf{1}_{\{X_k=0\}} \mid X_0 = 5 \right] = \frac{\pi(0)}{\pi(5)} = \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{6} = 20$$

(3)

Άσκηση 6

$$\mathbb{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$p(k, k+1) = p < 1 \quad \forall k \in \mathbb{X}$$

$$p(k, 0) = 1-p$$

Δεν περικύρνουμε να σχεδιάσουμε ΣΑΙ, αγού από το 15 μέχρι μερολέπτης να πάρει συνολικά 0, ενώ αντί να 0 δεν μπορούμε να πάρει συνολικά 15.

$$\pi(x) = \sum_{y \in \mathbb{X}} \pi(y) p(y, x) \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

$$\text{Για } x=0: \quad \pi(0) = \sum_{y=0}^{\infty} \pi(y) p(y, 0)$$

$$\Leftrightarrow \pi(0) = (1-p) \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \pi(y)}_{\pi(0)} \quad \Leftrightarrow \pi(0) = 1-p \quad \Rightarrow \pi(0) = (1-p)p^n$$

$$\text{Για } x=n \in \mathbb{N}: \quad \pi(n) = \pi(n-1)p \Rightarrow \pi(n) = \pi(0)p^n$$

$$\text{Επίπεδος } \overline{\mathbb{E}_0[T_0^+]} = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}[T_0^+ = k] = \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1}(1-p) = (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = (1-p) \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p}$$

$$\text{επειδή } \sum_{k=1}^{\infty} ka^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{da} a^k = \frac{d}{da} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a^k \right) = \frac{d}{da} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{1}{1-a} \right) = \frac{1}{(1-a)^2}$$

$$\pi(0) = \frac{1}{\mathbb{E}_0[T_0^+]} = 1-p$$

$$\frac{\pi(n)}{\pi(0)} = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{k=1}^{T_0^+} \mathbf{1}_{\{\bar{X}_k = n\}} \right] = 1 \cdot \mathbb{P}[T_0^+ < T_0^+] + 0 \cdot \mathbb{P}[T_0^+ > T_0^+] = p^n$$

$$\text{Οπότε } \pi(n) = (1-p)p^n.$$

(4)

Άσκηση 7

$$\mathbb{P}[\bar{X}=0]=\frac{1}{4} \quad \mathbb{P}[\bar{X}=1]=\frac{1}{2} \quad \mathbb{P}[\bar{X}=2]=\frac{1}{6} \quad \mathbb{P}[\bar{X}=3]=\frac{1}{12}$$

$\bar{X}_n = \# \text{ πακέτων μελοδών που σχετίζονται σε βράβου της ημέρας πέπας}$

$$\mathbb{X} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{Για } n \geq 2: p(n, n+1) = \mathbb{P}[\bar{X}=0] = \frac{1}{4}$$

$$p(n, n) = \mathbb{P}[\bar{X}=1] = \frac{1}{2}$$

$$p(n, n-1) = \mathbb{P}[\bar{X}=2] = \frac{1}{6}$$

$$p(n, n-2) = \mathbb{P}[\bar{X}=3] = \frac{1}{12}$$

$$\text{Για } n=1: p(1, 2) = \frac{1}{4}$$

$$p(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$p(1, 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Για } n=0: p(0, 1) = \frac{1}{4}$$

$$p(0, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

Αναλογικά κατανομή:

$$\text{Για } n \geq 1: \pi(n) = \sum_{m=0}^n \pi(m) p(m, n) = \pi(n-1) \frac{1}{4} + \pi(n) \frac{1}{2} + \pi(n+1) \frac{1}{6} + \pi(n+2) \frac{1}{12}$$

$$\text{Για } n=0: \pi(0) = \pi(0) \frac{3}{4} + \pi(1) \frac{1}{4} + \pi(2) \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12} \pi(n+2) + \frac{1}{6} \pi(n+1) - \frac{1}{2} \pi(n) + \frac{1}{4} \pi(n-1) = 0$$

$$\text{Χαρακτηριστική εξίσωση: } \frac{\lambda^3}{12} + \frac{\lambda^2}{6} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 - 6\lambda + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 + 3\lambda - 3) = 0 \quad \begin{array}{l} \lambda=1 \\ \Delta=9+12=21 \end{array}$$

(5)

Όποιες $\pi(n) = c_1 \cdot 1^n + c_2 \left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right)^n + c_3 \left(\frac{-\sqrt{21}-3}{2}\right)^n$

$c_3 = 0$, γιατί $\left|\frac{-\sqrt{21}-3}{2}\right| > 1$, ενώ $\pi(n) \in [0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα $\pi(n) = c_1 + c_2 \left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right)^n$

Επίσης $c_1 = 0$, χωρίς να ξέρουμε $\sum_n \pi(n) = 1 < +\infty$

Όποιες για $n \geq 1$: $\pi(n) = c \left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right)^n$

Επίσης $\frac{1}{4} \pi(0) = \frac{1}{4} \pi(1) + \frac{1}{12} \pi(2)$

$$\Leftrightarrow \pi(0) = \pi(1) + \frac{\pi(2)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \pi(0) = c \left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right) + \frac{c}{3} \left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right)^2 = c + \frac{c}{3} \lambda^2$$

Αναλογία $1 = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) \Leftrightarrow c + \frac{c}{3} \lambda^2 + c \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = 1$

$$\Leftrightarrow c + \frac{c}{3} \lambda^2 + c \frac{\lambda}{1-\lambda} = 1$$

$$\Leftrightarrow c \left(\lambda + \lambda^2 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow c = \dots$$

Όποιες βρήκαμε την αναλογία κατανούμε.

$$P[X_n = 0] = P[\text{να μην υπάρχουν μεταβολές} \Rightarrow \text{βρέθην της } n\text{-οτεύς μέρας}]$$

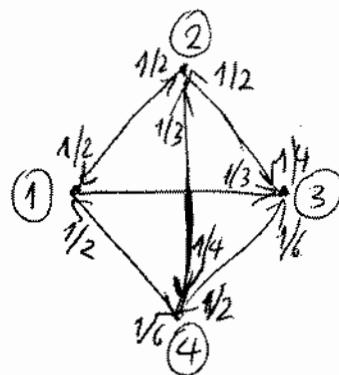
$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ν. μερ., απεριόδιη}} \pi(0) = c \lambda / \left(1 + \frac{\lambda}{3}\right) = \frac{\lambda \left(1 + \frac{\lambda}{3}\right)}{\lambda \left(1 + \lambda + \frac{1}{1-\lambda}\right)} = \frac{1 + \frac{\lambda}{3}}{1 + \lambda + \frac{1}{1-\lambda}}$$

(Υπήρχε αναλογία κατανούμε επειδή η αναμενόμενη (E) βήματα ήταν μεγαλύτερη των εργασιών του ειδικού κάθε μέρα. Αλλιώς η αναλογία θα ήταν γύρισα σκαναλογική.)

(6)

'Ασκηση 1

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$$



a) $\left\{ \begin{array}{l} \pi = \pi P \\ \sum_x \pi(x) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \pi = \left(\frac{93}{350}, \frac{108}{350}, \frac{71}{350}, \frac{78}{350} \right)$

B) $E_1[T_1^+] = \frac{1}{\pi(1)} = \frac{350}{93}$

γ) $T_0 = 0$

$T_1 = T_1^+$

$T_2 = \inf \{ k > T_1 : X_k = 1 \}$

$T_n = \inf \{ k > T_{n-1} : X_k = 1 \}$: Χρήστος n -ο σταθμός επιστροφής σε 1.

$$\begin{aligned} E_1 \left[\sum_{k=1}^{T_{93}} \mathbb{1}_{\{X_k=3\}} \right] &= E_1 \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{T_1} + \sum_{k=T_1+1}^{T_2} + \sum_{k=T_2+1}^{T_3} + \dots + \sum_{k=T_{92}+1}^{T_{93}}}_{\text{η}} \mathbb{1}_{\{X_k=3\}} \right] \\ &= \underbrace{E_1 \left[\sum_{k=0}^{T_1} \mathbb{1}_{\{X_k=3\}} \right]}_{\frac{\pi(3)}{\pi(1)}} + E_1 \left[\sum_{k=T_1+1}^{T_2} \mathbb{1}_{\{X_k=3\}} \right] + \dots + E_1 \left[\sum_{k=T_{92}+1}^{T_{93}} \mathbb{1}_{\{X_k=3\}} \right] \\ &\downarrow Y_n = X_{T_1+n} : \text{είναι μια μακροβλαστή αλυσίδα} \\ &\text{πε} Y_0 = X_{T_1} = 1 \text{ και τα } i^{\text{τέσσερα}} \text{ πιθανότητες} \\ &\text{περιβάλλονται με την ίδια σχέση } \pi(X_n) \end{aligned}$$

$T_2 = \inf \{ k > T_1 : X_k = 1 \}$

$= \inf \{ n > 0 : X_{T_1+n} = 1 \} + T_1$

$= \inf \{ n > 0 : Y_n = 1 \} + T_1$

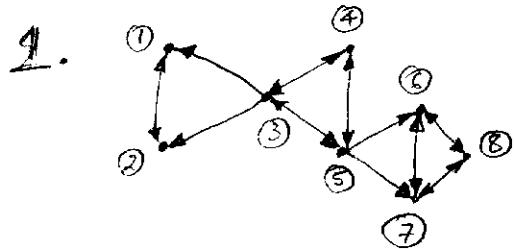
Όποιως $E_1 \left[\sum_{k=T_1+1}^{T_2} \mathbb{1}_{\{X_k=3\}} \right] = E_1 \left[\sum_{n=1}^{T_2-T_1} \mathbb{1}_{\{X_{T_1+n}=3\}} \right]$

$$= E_1 \left[\sum_{n=1}^{T_2-T_1} \mathbb{1}_{\{Y_n=3\}} \right] = E_1 \left[\sum_{n=1}^{T_1(3)} \mathbb{1}_{\{Y_n=3\}} \right] = \frac{\pi(3)}{\pi(1)}$$

(7)

$$0_{\pi \in \mathcal{E}} \quad \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{93} \mathbf{1}_{\{\bar{X}_k = 3\}} \right] = \frac{\pi(3)}{\pi(1)} + \frac{\pi(3)}{\pi(1)} + \dots + \frac{\pi(3)}{\pi(1)}$$
$$= 93 \frac{\pi(3)}{\pi(1)} = 93 \frac{71}{93} = 71$$

5V



$C_1 = \{1, 2\}$ κάθετη + παραγόμενη \rightarrow γν. συναρτήσεων

$C_2 = \{3, 4, 5\}$ αντικατ. \rightarrow παραγόμενη

$C_3 = \{6, 7, 8\}$ γειτον. + παραγόμενη \rightarrow γν. συναρτήσεων

Στη παραδίκη αναπτύχθηκε λεκανώθη της παραγόμενης σειράς C_3

$$\begin{cases} (\pi_1(1), \pi_1(2)) = (\pi_1(1), \pi_1(2)) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1(1) = 1/3 \\ \pi_1(2) = 2/3 \end{cases} \\ (\pi_1(1) + \pi_1(2)) = 1 \end{cases}$$

$$(1) \text{ για } x \in \{1, 2\} \quad \mathbb{P}_x \left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow 1 \cdot \pi_1(1) + 2 \cdot \pi_1(2) = \frac{5}{3} \right] = 1 \quad (\text{εργοδικός θεώρημα})$$

Στη παραδίκη αναπτύχθηκε λεκανώθη της παραγόμενης σειράς C_3 . Η μετατροπή στην παραγόμενη σειρά \mathbb{P} σειρά C_2 είναι διπλή συνέπειας στην παραγόμενη σειρά C_3 : $\pi_3(6) = \pi_3(7) = \pi_3(8) = \frac{1}{3}$

$$(2) \text{ για } x \in \{6, 7, 8\} \quad \mathbb{P}_x \left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow 6 \pi_3(6) + 7 \pi_3(7) + 8 \pi_3(8) = 7 \right] = 1 \quad (\text{εργοδικός θεώρημα})$$

Επομένως $T_1 = \inf\{k \geq 0 : X_k \in C_3\}$, $T_2 = \inf\{k \geq 0 : X_k \in C_2\}$, $T = T_1 \wedge T_2$.

$$(3) \text{ Επίσημα } n \in C_2 \text{ είναι ουδεμία σινετε } \mathbb{P}_n[T < +\infty] = 1$$

Για να δημιουργήσουμε $\mathbb{P}_n[T < T_2]$, χρησιμοποιούμε την $h(x) = \mathbb{P}_x[T < T_2]$

$$\text{Για } x \in \text{NET} \quad \begin{cases} h(x) = 0 & x \in C_2 \\ h(x) = 1 & \text{όταν } x \in C_1 \\ h(x) = 0 & \text{όταν } x \in C_3 \end{cases} \Rightarrow h(a) = \frac{14}{41}.$$

$$\text{Τιμούμε } \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_{T-1}}{n} + \frac{X_{T+1} + \dots + X_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_{T-1}}{n} + \frac{n-T+1}{n} \frac{X_{T+1} + \dots + X_n}{n-T+1}$$

$$\text{Όπου αν } T < +\infty \text{ έχουμε } \frac{X_{T+1} + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \& \quad \frac{n-T+1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\text{Άρα αν } T < +\infty \text{ έχουμε } \lim_n \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \lim_n \frac{X_{T+1} + \dots + X_n}{n} \text{ στην παραπάνω υποεξιτημένη}$$

Αν δηλ. τα (1)-(3) διανομές της παραδίκης ιδιαίτερη, τα εργοδικά στοιχεία
της παραδίκης 1 και στην ίδια σειρά $\frac{14}{41}$ συναντούμεται στην παραδίκη $\{T_1 < T_2\}$ (όπως την παραδίκη 1 την παραδίκη 2 ήταν $\frac{27}{41}$)

2. (Φυλακή ηλεκτρονικών συστημάτων)

$$3. \text{ Η έκφραση } Y_n \text{ είναι } n \text{-μορφ. δομή σε } \mathbb{X} = \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} : p(x, y) > 0\}$$

Η έκφραση Y_n είναι n -μορφ. δομή σε \mathbb{X} , έκφραση $n \in \mathbb{X}$ είναι n -μορφ. δομή σε \mathbb{X} .
Πράγματα αν $(x, y) \in \mathbb{X}$ & $(x', y') \in \mathbb{X}$, έκφραση $n \in \mathbb{X}$ είναι n -μορφ. δομή σε \mathbb{X}

υπόκειται στη λογοτεχνία $z_1 = y_1, z_2, z_3, \dots, z_k = x'$ τ.ώ. $p(z_i, z_{i+1}) > 0$ $i = 1, \dots, k$.

Επίσημα $(x, y) \in \mathbb{X}$ έχουμε $p(x, y) > 0$ $\&$ άλλως

$(x', y') \in \mathbb{X}$ έχουμε $p(x', y') > 0$. (Θέση $z_0 = x$, $z_{k+1} = y'$)

Επομένως στη λογοτεχνία $(x, y), (y, z_1), (z_1, z_2), (z_2, z_3), \dots, (\underbrace{z_{k-1},}_{U_{k-1}} x), (\underbrace{z_k,}_{U_k} y')$

$$\tilde{p}(u_i, u_{i+1}) = \tilde{p}((z_i, z_{i+1}), (z_{i+1}, z_{i+2})) = \delta_{z_{i+1}, z_{i+2}} p(z_{i+1}, z_{i+2}) = p(z_{i+1}, z_{i+2}) > 0$$

και $\{Y_n\}$ είναι n -μορφ. δομή. Επίσημα $\{Y_n\}$ έχει n -μορφ. δομή σε \mathbb{X}
τοπ. είναι γν. συναρτήσεων & έχει εργοδικό θεώρημα $H(x, y) \in \mathbb{X}$

$$\mathbb{P}_{(x, y)} \left[\frac{f(Y_1) + \dots + f(Y_n)}{n} \rightarrow \sum_{(x, y) \in \mathbb{X}} f(x, y) \pi(x, y) p(x, y) \right] = 1.$$

4. Für die Ziffern zum Herausheben der Ziffern von 3, 5, 4 fügt man zu jedem einer

$$\underbrace{\mathbb{1}\{X_1=3, X_2=4\} + \dots + \mathbb{1}\{X_{n-4}=3, X_n=4\}}_{\text{Herausheben einer 3 nach 4}} + \underbrace{\mathbb{1}\{X_1=4, X_2=3\} + \dots + \mathbb{1}\{X_{n-4}=4, X_n=3\}}_{\text{Herausheben einer 4 nach 3}}$$

Analog dazu gilt für $\pi(3)$

$$\frac{N_{3,4}(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(3) p(3,4) \quad \text{für unendliche Länge}$$

$\hookrightarrow \frac{N_{4,3}(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(4) p(4,3) \quad \text{für endliche Länge}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Paar von Ziffern 3 und 4 ist, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass ein Paar von Ziffern 3 und 4 entweder durch eine 3 oder durch eine 4 ersetzt wird.

$$\pi(3)p(3,4) + \pi(4)p(4,3) = \pi(3)\frac{1}{2} + \pi(4)\frac{1}{6}.$$

Beispiel: In $\pi(3), \pi(4)$ und $\pi(1)$ sind nur die ersten zwei Vierzehntausend Einträge

$$\left\{ \begin{array}{l} (\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4)) = (\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4)) \\ \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) = 1 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1/6 & 1/12 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{array} \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n=4 | X_{n-1}=3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(X_n=4, X_{n-1}=3)}{P(X_{n-1}=3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(X_n=4) p(4,3)}{P(X_{n-1}=3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n=4, X_{n-1}=3) = \frac{\pi(4)}{\pi(3)} p(4,3) = \frac{37}{76} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \pi(3) = \frac{38}{281} \\ \pi(4) = \frac{111}{281} \end{array}$$

5.) Beispiel: $P[X_{n+1} = E | X_n = E, X_{n-1} = A] = \frac{1}{2}$, d.h. in X_n kann das Zeichen E nicht

\hookrightarrow $P[X_{n+1} = E | X_n = E, X_{n-1} = A] = \frac{1}{3}$ \hookrightarrow es gibt drei mögliche Zeichen für X_{n+1} $\Rightarrow P[X_{n+1} = E | X_n = E]$

b) Nun

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \pi_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \cdot P \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8} \right)$$

8.) $f(x,y) = x$ \Rightarrow Erwartungswerte von x und y sind

$$N_n = f(Y_1) + f(Y_2) + \dots + f(Y_n)$$

Analog zu 2. Spalte: $\mathbb{E}[x] = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}_y \left[\frac{N_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[x] \right] = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_y \left[\frac{N_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{16} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{3}{16} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 \right] = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_y \left[\frac{N_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{5}{16} \right] = 1$$

Häufigkeit der 2. Spalte ist ein Vierzehntausender

$$R_n = 0, \quad \text{d.h. } R_n = 0 \Leftrightarrow X_{n-1} + Y_n \leq 9$$

$$(X_{n-1}, Y_n) \in \begin{cases} (0,0), (0,1), \dots, (0,9) \\ (1,0), (1,1), \dots, (1,8) \end{cases}$$

$$\text{Also: } P[R_{n+1}=0 | R_n=0] = \frac{85}{100} = \frac{11}{20} \quad \begin{pmatrix} (0,0), (0,1), \dots, (0,9) \\ (1,0), (1,1), \dots, (1,8) \end{pmatrix}$$

$$P[R_{n+1}=1 | R_n=0] = \frac{15}{100} = \frac{9}{20}$$

Offensichtlich, da $R_n=1$ $\Rightarrow R_{n+1}=0 \Leftrightarrow X_{n-1} + Y_n \leq 8 \Leftrightarrow (X_{n-1}, Y_n) \in \{(0,0), \dots, (0,8), \dots, (7,0), (7,1)\}$

$$\text{Also: } P[R_{n+1}=0 | R_n=1] = \frac{2}{20} \quad P[R_{n+1}=1 | R_n=1] = \frac{18}{20}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{9}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{11}{20} \end{pmatrix}, \quad \text{Häufigkeit der 1. Spalte ist ein Vierzehntausender}$$

$$P \left[\frac{A_n}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} - \frac{P_1 + \dots + P_n}{n} \rightarrow \left[x \cdot 11/20 + 0 \cdot 9/20 \right] = 1$$

$$\pi(0) = \frac{1}{2} = \pi(1)$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & -\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \mathbb{X}} \pi(x)p(x,y) (f(y) - f(x))^2 = -\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \mathbb{X}} \pi(x)p(x,y) (f^2(y) + f^2(x) - 2f(y)f(x)) \\
 & = -\frac{1}{2} \sum_y f^2(y) \sum_x \underbrace{\pi(x)p(x,y)}_{\text{Probability}} - \frac{1}{2} \sum_x f^2(x) \pi(x) \sum_y p(x,y) + \sum_{x,y} \pi(x)p(x,y) f(y)f(x) \\
 & = -\frac{1}{2} \sum_y f^2(y) \pi(y) - \frac{1}{2} \sum_x f^2(x) \pi(x) + \sum_{x,y} \pi(x)p(x,y) f(x)f(y) \\
 & = -\sum_{xy} \pi(x) f^2(x) p(x,y) + \sum_{xy} \pi(x)p(x,y) f(x)f(y) \\
 & = \sum_x \pi(x) f(x) \sum_y p(x,y) (f(y) - f(x)) = \sum_x \pi(x) f(x) Lf(x)
 \end{aligned}$$

$\forall Lf(x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$ d.h. zuerst optimieren und dann $\sum x_i \pi(x_i)$

$$\sum_{x,y \in \mathbb{X}} \underbrace{\pi(x)p(x,y)}_{>0} (f(y) - f(x))^2 = 0 \Rightarrow \pi(x)p(x,y) (f(y) - f(x))^2 = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{X}$$

$$\Rightarrow \pi(x)p(x,y) (f(y) - f(x)) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Es ist nun zu zeigen, dass $f(x)$ unter der Voraussetzung

$$x_0, x_1, \dots, x_m = x \quad \text{t.w.} \quad p(x_i, x_{i+1}) > 0 \quad i=0, 1, \dots, m-1$$

$\hat{A} \rho \alpha \quad f(x) = f(x_0) = f(x_{m-1}) = \dots = f(x_0)$ ist f eine Gradient.

B. Es sei $G(x) = \mathbb{E}[T_Y | X_0 = x]$

$$\begin{aligned}
 LG(x) &= \sum_z p(x,z) (G(z) - G(x)) = \sum_z p(x,z) G(z) - G(x) \\
 &= \sum_z p(x,z) \mathbb{E}[T_Y | X_0 = z] - G(x) = (\mathbb{E}[T_Y^+ | X_0 = x] - 1) - \mathbb{E}[T_Y^- | X_0 = x] \\
 &= \mathbb{E}[T_Y^+ - T_Y^- | X_0 = x] - 1.
 \end{aligned}$$

Offenbar ist $T_Y^+ - T_Y^-$ die Differenz der T_Y^+ und T_Y^- über alle $y \neq x$, d.h. $T_Y^+ - T_Y^- = T_{x^+}$.

$$\hat{A} \rho \alpha \quad LG(x) = \mathbb{P}[Y=x] \mathbb{E}[T_{x^+}] - 1 = \pi(x) \mathbb{E}[T_{x^+}] - 1 = 0.$$

Aber zuerst optimieren müssen wir G einen Gradienten!

(1)

Λύσεις Φυλλαδίου VI

Πέμπτη
18/6/15 Άσκηση 1

$$\begin{aligned}
 P[N_1=9 | N_2=10] &= \frac{P[N_1=9, N_2=10]}{P[N_2=10]} \\
 &= \frac{P[N_1=9, N_2-N_1=1]}{P[N_2=10]} \\
 &= \frac{P[N_1=9] \cdot P[N_2-N_1=1]}{P[N_2=10]} \\
 &= \frac{e^{-\lambda_1} \frac{(\lambda_1)^9}{9!} \cdot e^{-\lambda_2} \frac{(\lambda_2)^1}{1!}}{e^{-\lambda_2} \frac{(\lambda_2)^{10}}{10!}} \\
 &= \frac{10!}{9! 1!} \frac{1}{2^{10}} \\
 &= \binom{10}{9} \frac{1}{2^{10}}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

$Po(\mu)$, $S_N = E_1 + \dots + E_N$

$$P\left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} = \frac{1}{\mu}\right] = P\left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_1 + \dots + E_N}{N} = \frac{1}{\mu}\right] = 1 \quad \text{ανά } \Rightarrow \text{Νόμος των}$$

Μεγάλων Αριθμών,
αφού $E[E_i] = \frac{1}{\mu}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} P\left[S_N \leq \frac{N}{\mu}\right] &= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left[\frac{S_N}{N} - \frac{1}{\mu} \leq 0\right] \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{N}}{\mu} \left(\frac{S_N}{N} - \frac{1}{\mu} \right) \leq 0 \right] \xrightarrow[\text{σταθερά}]{\text{Κανόνικο}} P[Z \leq 0] = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

όπου $Z \sim N(0,1)$

Καθ: $\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right) \xrightarrow{d} N(0,1) \Leftrightarrow \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \sim \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z$

(2)

Άσκηση 3

$$\begin{aligned} \Pr[N_s=j \mid N_t=N] &= \frac{\Pr[N_s=k, N_t=N]}{\Pr[N_t=N]} \\ &= \frac{\Pr[N_s=k, N_t-N_s=N-k]}{\Pr[N_t=N]} \end{aligned}$$

Εκφράζεται στο πρώτο μέρος της εξίσωσης
θα είναι N_t-N_s , για να εκφραστεί το
δεύτερο μέρος ότι η Poisson
είναι ανεξάρτητης προσανθυφέσης.

$$= \frac{\Pr[N_s=k] \cdot \Pr[N_{t-s}=N-k]}{\Pr[N_t=N]}$$

$$= \frac{e^{-as} \frac{(as)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{N-k}}{(N-k)!}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^N}{N!}}, \quad \text{αν } k \in \{0, 1, \dots, N\}$$

$$= \begin{cases} 0 \\ \binom{N}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{N-k}, & k \in \{0, 1, \dots, N\} \\ 0, & k \notin \{0, 1, \dots, N\} \end{cases}$$

↪ διανοητική κατανόηση: σαν να πετάπει
Ν σημεία στο $[0, t]$ αρχιδεμένα

Άσκηση 4

$$\lambda = \frac{1}{5 \text{ min}} \quad \mu = \frac{1}{30 \text{ min}}$$

Αν σε διάστημα 11 π.μ.-12 μ. φτάνουν 10 άτομα, ποια είναι η πιθανότητα να φτάνουν 2 σε πολύ καθηγήσεις;

N^1 : αριθμός φοιτητών σε διάστημα 11 π.μ.-12 μ.

N^2 : αριθμός καθηγήσεων σε διάστημα 11 π.μ.-12 μ.

$$\begin{aligned} \Pr[N_1^2 \leq 2 \mid N_1^1 + N_1^2 = 10] &= \frac{\Pr[N_1^2 \leq 2, N_1^1 + N_1^2 = 10]}{\Pr[N_1^1 + N_1^2 = 10]} \\ &= \frac{\Pr[N_1^2 = 0, N_1^1 = 10] + \Pr[N_1^2 = 1, N_1^1 = 9] + \Pr[N_1^2 = 2, N_1^1 = 8]}{\Pr[N_1^1 + N_1^2 = 10]} \end{aligned}$$

(3)

$$= \frac{P[N_1^2=0] \cdot P[N_1^1=10] + P[N_1^2=1] P[N_1^1=9] + P[N_1^2=2] P[N_1^1=8]}{P[N_1^1+N_1^2=10]}$$

für $t=10$ min:

$$\lambda t = \frac{1}{5} \text{ min} = 12 \Rightarrow N_1^1 \sim P_0(12)$$

$$\mu t = \frac{1}{30} \text{ min} = 2 \Rightarrow N_1^2 \sim P_0(2)$$

$$N_1^1 + N_1^2 \sim P_0(14)$$

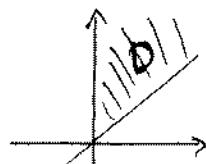
$$= \frac{e^{-12} \frac{2^0}{0!} e^{-12} \frac{12^{10}}{10!} + e^{-2} \frac{2^1}{1!} e^{-12} \frac{12^9}{9!} + e^{-2} \frac{2^2}{2!} e^{-12} \frac{12^8}{8!}}{e^{-14} \frac{14^{10}}{10!}}$$

$$= \frac{\frac{2^0}{0!} \frac{12^{10}}{10!} + \frac{2^1}{1!} \frac{12^9}{9!} + \frac{2^2}{2!} \frac{12^8}{8!}}{14^{10} / 10!}$$

$$= \sum_{j=0}^2 \binom{10}{j} \left(\frac{2}{14}\right)^j \left(\frac{12}{14}\right)^{10-j}$$

$$E_1^{\phi} \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$E_1^x \sim \text{Exp}(\mu)$$



$$\begin{aligned}
 P[E_1^{\phi} < E_1^x] &= P((E_1^{\phi}, E_1^x) \in D) = \iint_D f_{E_1^{\phi}, E_1^x}(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dy dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-\mu x} dx \\
 &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)x} dx \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}
 \end{aligned}$$

(4)

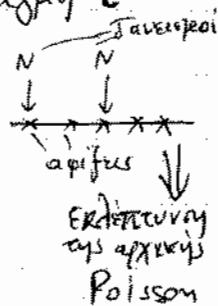
$$P_1 = \frac{1}{6} \quad P_2 = \frac{4}{5}$$

Z_t : Η μερική διαδικασία για τους δανειοφόρους βέβαιων

$Z_t = k \Leftrightarrow k$ βέβαια σήμερα δανειοφόρη μέχρι τη χρονική στιγμή t

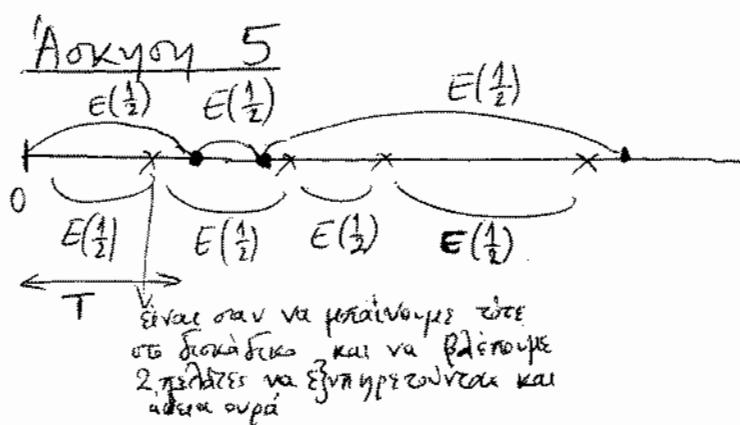
Z_t^1 : δανειοφόροι από φορτυτές: Είναι διαδικασία Poisson (λP_1)

Z_t^2 : δανειοφόροι από καθηγετές: Είναι διαδικασία Poisson (μP_2)



Άρα Z_t είναι διαδικασία Poisson ($\lambda P_1 + \mu P_2$)

Η πιθανότητα ότι πάνω βέβαιο της μητραρεί να το δανειοφόροι φορτυτές είναι $\frac{\lambda P_1}{\lambda P_1 + \mu P_2}$



Τα πέρατα των εξυπηρετήσεων των καταθέτων 1 είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\frac{1}{2}$: N_t^1

Τα πέρατα των εξυπηρετήσεων των καταθέτων 2 είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\frac{1}{2}$: N_t^2

Τα πέρατα των εξυπηρετήσεων είναι η $N_t^1 + N_t^2$ (Poisson με ρυθμό 1)

$T =$ ο χρόνος του θα αρχίσουμε να εξυπηρετούμεσε είναι το άθροισμα δύο $E(1)$, οπότε $G(1,2)$.

$E =$ ο χρόνος εξυπηρέτησης περίπου $G(\frac{1}{2}, 1)$ αντίστοιχα του T

(5)

$$\text{Συνδικήση χρόνου} \quad S = T + E$$

are independent

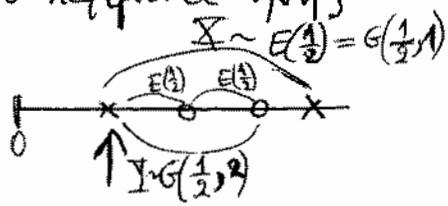
$$f_T(t) = \frac{1}{\Gamma(2)} t^{2-1} e^{-t}, \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad f_T(t) = t e^{-t}, \quad t > 0$$

$$f_E(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x > 0$$

$$\begin{aligned} f_S(s) &= f_T(s) * f_E(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) f_E(s-t) dt \\ &= \int_0^s t e^{-t} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(s-t)} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}s} \int_0^s t e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= 0 \quad \forall t < 0 \\ f_E(s-t) &= 0 \quad \forall s-t < 0 \Leftrightarrow t > s \end{aligned}$$

Ποια είναι η πλανητικά και σεληνώμορφη μορφής των πιθανότητων περιπέτειας γύρω;



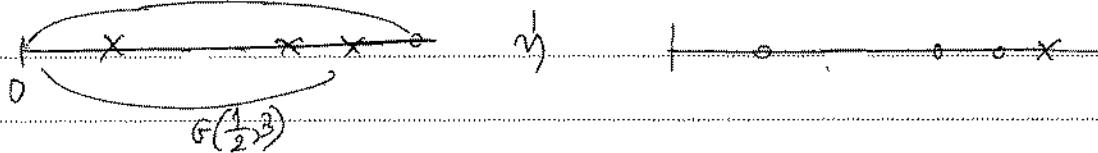
$$\begin{aligned} X &\sim G\left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ Y &\sim G\left(\frac{1}{2}, 2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[Y < X] &= P[(X, Y) \in D] = \int_0^\infty dx \int_0^x dy f_{X,Y}(x,y) \\ &= \int_0^\infty dx \int_0^x dy f_X(x) f_Y(y) \\ &= \int_0^\infty dx \int_0^x dy \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(2)} y^{2-1} e^{-\frac{1}{2}y} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty dy \cdot y e^{-\frac{1}{2}y} \int_y^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty dy y e^{-y} = \frac{1}{4} \Gamma(2) = \frac{1}{4} \cdot 1! = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(6)

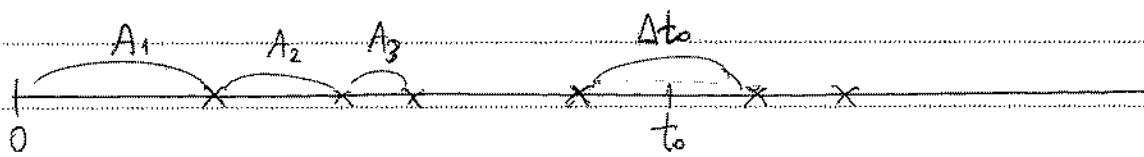
Πολλά είναι η πιθανότητα να τελειώσουμε πριν από κατανούν
πελάτη του εγγυητή ή όχι μην κατεβεί;

$$E\left(\frac{1}{2}\right)$$



Άρα η Γεγονότητα πιθανότητα είναι $2P[G(\frac{1}{2})^3] < G(\frac{1}{2}, 1)]$

Άσκηση 8



Πολλά καραυρή ακολούθι το |Ato|;

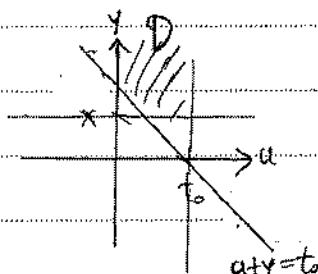
Έχουμε τη φαντάξειρα στη βιας ευνοίαται τα μεγάλα διαστήματα.

$$\text{Για } x > 0: P[|At_0| > x] = \sum_{n=0}^{\infty} P[|A_n| > x \text{ και } t_0 \in A_n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[E_{n+1} > x, S_n \leq t_0 < S_n + E_{n+1}]$$

$$S_n \sim G(n, \lambda)$$

$$\text{Επομένως } E_{n+1} \sim G(1, \lambda) \text{ ανταποκρίνεται } S_n = P[E_1 > x, 0 \leq t_0 \leq E_1] + \sum_{n=1}^{\infty} P[E_{n+1} > x, S_n \leq t_0 < S_n + E_{n+1}] \\ = P[E_1 > \max\{x, t_0\}] + \sum_{n=1}^{\infty} P[S_n \leq t_0, E_{n+1} > \max\{x, t_0 - S_n\}]$$



$$= e^{-\lambda \max\{x, t_0\}} + \sum_{n=1}^{\infty} P[(S_n, E_{n+1}) \in D]$$

$$= e^{-\lambda \max\{x, t_0\}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t_0} du \int_{(t_0-u)x}^{+\infty} dy \lambda e^{-\lambda y} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u}$$

$$= e^{-\lambda(xvt_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t_0} du \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(xv(t_0-u))}$$

Για $t_0 \rightarrow \infty$:

$\frac{\exp(u)}{\exp(\lambda u)}$

$\frac{1}{\lambda u}$

t_0

$$= e^{-\lambda(xvt_0)} + \int_0^{t_0} du \lambda e^{-\lambda(xv(t_0-u))} e^{-\lambda u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= e^{-\lambda(xvt_0)} + \int_0^{t_0} du \lambda e^{-\lambda(xv(t_0-u))} = \dots$$

$\frac{1}{e^{\lambda u}}$

Φ VI

to : μη ξέρων
t₁ : 720

$$\textcircled{1}. \quad \mathbb{P}[N_{t_0}^A = 0, N_{t_0}^B = 1, N_{t_1}^A = 3, N_{t_1}^B = 1] =$$

$$= \mathbb{P}[N_{t_0}^A = 0, N_{t_1}^A - N_{t_0}^A = 3, N_{t_0}^B = 1, N_{t_1}^B - N_{t_0}^B = 0] =$$

$$= \frac{e^{-\lambda_A t_0} (\lambda_A t_0)^0}{0!} \cdot \frac{e^{-\lambda_B (t_1-t_0)} (\lambda_B (t_1-t_0))^1}{1!} \cdot \frac{e^{-\lambda_A (t_1-t_0)} (\lambda_A (t_1-t_0))^3}{3!} \cdot \frac{e^{-\lambda_B (t_1-t_0)} (\lambda_B (t_1-t_0))^0}{0!}$$

$$= e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_1} \cdot \frac{[\lambda_A (t_1-t_0)]^3 (\lambda_B t_0)}{6} = e^{-(\frac{1}{45} + \frac{1}{60}) 90} \cdot \frac{\left(\frac{1}{45} \cdot 45\right)^3 \left(\frac{1}{60} \cdot 45\right)}{6}$$

$$= e^{-\frac{7}{2}} \cdot \frac{3/4}{6} = \frac{1}{8} e^{-\frac{7}{2}}$$

$$\mathbb{P}[N_{t_1}^A = 2, N_{t_1}^B = 1 | N_{t_0}^A = 0, N_{t_0}^B = 1] = \mathbb{P}[N_{t_1}^A - N_{t_0}^A = 2, N_{t_1}^B - N_{t_0}^B = 0 | N_{t_0}^A = 0, N_{t_0}^B = 1]$$

$$= \mathbb{P}[N_{t_1}^A - N_{t_0}^A = 2, N_{t_1}^B - N_{t_0}^B = 0] \quad \begin{array}{l} \text{(αφει στη } N_{t_1}^A - N_{t_0}^A \text{ στην } \mathbb{P} \\ \text{αφει στη } N_{t_1}^B \text{ στην } N_{t_0}^B \text{ ότι } A, B \in \{A, B\} \end{array}$$

$$= \mathbb{P}[N_{t_1-t_0}^A = 2] \mathbb{P}[N_{t_1-t_0}^B = 0]$$

$$= e^{-\lambda_A (t_1-t_0)} \frac{[\lambda_A (t_1-t_0)]^2}{2!} \cdot e^{-\lambda_B (t_1-t_0)} \frac{[\lambda_B (t_1-t_0)]^0}{0!} = e^{-(\lambda_A + \lambda_B)(t_1-t_0)} \frac{[\lambda_A (t_1-t_0)]^2}{2}$$

$$= e^{-(\frac{1}{45} + \frac{1}{60}) 45} \frac{\left(\frac{1}{45} \cdot 45\right)^2}{2} = \frac{1}{2} e^{-\frac{7}{4}}$$

7. Έστω $N_t = N_t^A + N_t^B$. Ανοίγουμε τη πρόβλημα δύο μερών στην πλάνη
Ενώ αυτού του πρώτου να φέρει να σιδερώνεται ο πλάνης $P = \frac{4t}{1+t}$; ανεξάρτητη
το άντικα του πλάνη t στο γήπεδο της πλάνης.

Από την κάθε διεργάση εκτελείται δοστική Bernoulli περιπτώσεις
(την πλάνη B) ισχύει P . Το γήπεδο της ανομοιότητας της πλάνης M επειδή
είναι το γήπεδο της αυτονομίας της πλάνης A πέπλητη μία διεργάση αυτορύθμησης
της πλάνης B , έπειτα από την πλάνη A πέπλητη μία διεργάση αυτορύθμησης
της πλάνης B .

Επειδή το γήπεδο της αυτονομίας της πλάνης A πέπλητη μία διεργάση αυτορύθμησης
της πλάνης B είναι μία διεργάση μία διεργάση αυτορύθμησης της πλάνης B πέπλητη μία διεργάση αυτορύθμησης της πλάνης A .

$$\mathbb{P}[M_A = k] = (1-p)^k p = \frac{2^k \mu}{(2\mu)^{k+1}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Αν M_A^3 είναι το γήπεδο της αυτονομίας της πλάνης A πέπλητη μία διεργάση αυτορύθμησης της πλάνης B είναι το γήπεδο της αυτορύθμησης της πλάνης B πέπλητη μία διεργάση αυτορύθμησης της πλάνης A .

$M_A^3 = k$ θα ισχύει σε πάνω από $k+3$ αυτορύθμησης, το γήπεδο
της αυτονομίας της πλάνης B είναι μία διεργάση μία διεργάση αυτορύθμησης της πλάνης B πέπλητη μία διεργάση αυτορύθμησης της πλάνης A .

$$\mathbb{P}[M_A^3 = k] = \binom{k+2}{2} p^3 (1-p)^k = \frac{(k+2)k+1}{2} \cdot \frac{\mu^3 \lambda^k}{(1+\mu)^{k+3}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$