

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Για τα ενδεχόμενα  $A, B$  και  $\Gamma$  δίνονται οι πιθανότητες:

$$P(A) = 0.30, \quad P(B|A) = 0.75, \quad P(B|A^c) = 0.20, \quad P(\Gamma|A \cap B) = 0.20.$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

$$(\alpha) \quad P(A \cap B \cap \Gamma), \quad (\beta) \quad P(A|B^c), \quad (\gamma) \quad P(A^c|B^c).$$

Είναι τα  $A$  και  $B$  ανεξάρτητα; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

2. Έστω  $X$  μια συνεχής τυχαία μεταβλητή. Θέτουμε  $Y = -X$ . Να υπολόγιστε την μέση τιμή  $E[Y]$ , την διασπορά  $V[Y]$ , καθώς και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f_Y(y)$  της  $Y$  αν:

- (α) Η  $X$  ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο  $a$ .  
(β) Η  $X$  ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή.  
(γ) Η  $X$  ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(a, b)$ .

3. Ένα ρομπότ συλλέγει δείγματα πάγου σε μια απρόσιτη για τον άνθρωπο περιοχή της Ανταρκτικής. Αν κάθε δείγμα περιέχει  $X$  θραύσματα μετεωριτών, όπου  $X$  είναι τ.μ. Poisson με παράμετρο  $\lambda = 0.25$ , πόσα τουλάχιστον δείγματα πρέπει να συλλέξει το ρομπότ ώστε όλα μαζί να περιέχουν πάνω από 40 θραύσματα μετεωριτών με πιθανότητα τουλάχιστον 0.95;

4. Έστω  $X_n, n = 1, 2, 3, \dots$ , μια ακολουθία από ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Δίνεται ακόμη ότι όλες οι  $X_n$  έχουν την ίδια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f(x)$  για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Για ένα δεδομένο πραγματικό αριθμό  $b$  θεωρείστε τα ενδεχόμενα

$$A = \limsup_n \{X_n > b\}, \quad B = \liminf_n \{X_n > b\}, \quad \Gamma = \limsup_n \{X_n \leq b\}, \quad \Delta = \liminf_n \{X_n \leq b\}.$$

Εξηγείστε με απλά λόγια τι σημαίνει το κάθε ένα από τα παραπάνω ενδεχόμενα και υπολογείστε τις πιθανότητές τους.

Διάρκεια 2.5h

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$