

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2016-17 στο Μάθημα
ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ και ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ
ΣΕΜΦΕ

Διάρκεια Εξέτασης : 2.30 ώρες.

ZΗΤΗΜΑ 1 (Βαθμός: 4.0)

(A) Γράψτε τη λογαριθμοποιημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας ενός μοντέλου παλινδρόμησης της Εκθετικής κατανομής $S(t|x) = \exp(-t/\lambda(x))$, όπου $\lambda(x) = \exp(\beta'x)$, όταν έχουμε και δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις.

(B) Πειραματιστής θέλει να συγκρίνει τρεις ομάδες από 20 ποντίκια η καθεμιά, ως προς τη διάρκεια ζωής τους T (σε εβδομάδες). 40 ποντίκια δοκιμάζονται σε 2 επίπεδα ραδιενεργούς ουσίας ($j = 1, 2$) και η τρίτη ομάδα αποτελεί την ομάδα ελέγχου (κατηγορία αναφοράς). Η ομάδα 1 έχει 4 δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις, η ομάδα 2 έχει 3 και η ομάδα 3 έχει 7 δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις. Για τη σύγκριση των τριών ομάδων κατασκευάζονται δύο δείκτριες μεταβλητές $x_j, j = 1, 2, x_j = 1$, αν το ποντίκι ανήκει στη j -οστή ομάδα, αλλιώς $x_j = 0$, και προσαρμόζονται δύο μοντέλα παλινδρόμησης: της Εκθετικής κατανομής και της κατανομής Weibull.

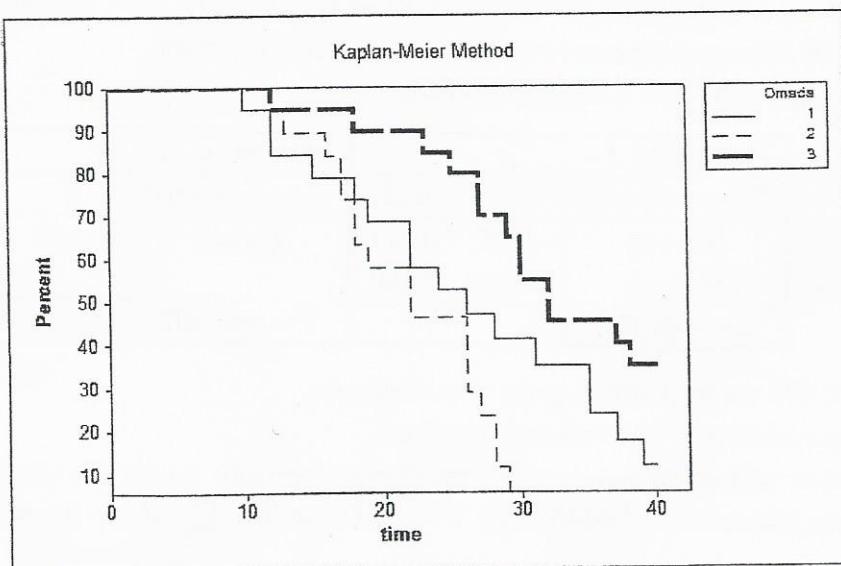
(i) Να γίνει η σύγκριση μεταξύ των δύο μοντέλων παλινδρόμησης με βάση α) τον έλεγχο του λόγου των πιθανοφανειών και β) το χριτήριο AIC.

(ii) Από το μοντέλο που προκύπτει, ελέγξτε με την ελεγχοσυνάρτηση Wald αν υπάρχουν διαφοροποιήσεις μεταξύ των τριών κατηγοριών ως προς τη διάρκεια ζωής και ερμηνεύστε τα αποτελέσματά σας. Ενισχύστε τα συμπεράσματά σας κάνοντας χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης των εκτιμήσεων Kaplan - Meier.

(iii) Με βάση το μοντέλο που έχει προκύψει να γίνει η πρόβλεψη της πιθανότητας τυχόν ποντίκι, που δοκιμάζεται στο $j = 1$ επίπεδο ραδιενεργούς ουσίας, να ξεπεράσει τις 20 εβδομάδες επιβίωσης $S(20|x)$.

[Δίνονται: Υπό το μοντέλο της Εκθετικής παλινδρόμησης: $\sum_{i=1}^n t_i \exp(-\beta'x) = 46$, $\hat{\beta}_0 = 3.897$ (se = 0.277), $\hat{\beta}_1 = -0.457$ (se = 0.373), $\hat{\beta}_2 = -0.682$ (se = 0.368) και

Υπό το μοντέλο της Weibull παλινδρόμησης: $S(t|x) = \exp(-[t/\lambda(x)]^\eta)$, $\hat{\beta}_0 = 3.657$ (se = 0.084), $\hat{\beta}_1 = -0.224$ (se = 0.114), $\hat{\beta}_2 = -0.480$ (se = 0.112), $\hat{\eta} = 3.3$, $\hat{l}_1 = -176.778$].



Από τα ακόλουθα 6 Ζητήματα επιλέξτε 2

ZΗΤΗΜΑ 2 (Βαθμός: 3.0)

Έστω T τ.μ. της Λογαριθμο-λογιστικής κατανομής με συνάρτηση επιβίωσης $S(t) = (1 + \alpha t^\gamma)^{-1}$, $t > 0$, $\alpha, \gamma > 0$. (i) Να βρεθεί η διάμεσος καθώς και η συνάρτηση διωκιδύνευσης $h(t)$. (ii) Να βρεθεί η συνάρτηση επιβίωσης $S^*(t)$ και η σ.π.π $g(t)$ της αριστερά κολοβής κατανομής στο σημείο t_0 .

ZHTHMA 3 (Βαθμός: 3.0)

(Α) Δείξτε ότι αν τ.μ. $T \sim \text{Weibull}$ τότε $X = \ln T \sim \text{Gumbel}$ και βρείτε τις σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων τους. $\eta \neq \ln \mu$

(Β) Να εκτιμηθεί η παραμετρος α της κατανομής Weibull ($\eta = 2$) με τη μέθοδο των ροπών μέσω της κατανομής Gumbel και με βάση το ακόλουθο δείγμα της κατανομής Weibull

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|
| 6.0 | 7.0 | 8.5 | 9.0 | 11.0 | 5.0 | 22.0 | 5.2 |
|-----|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|

[Δίνονται: Για την κατανομή Weibull : $S(t) = \exp\{-(t/\alpha)^\eta\}$.

Για την κατανομή Gumbel : $S(x) = \exp[-\exp\{(x - \mu)/\sigma\}]$, $E(X) = \mu - \gamma\sigma$, $\gamma = 0.5772$].

ZHTHMA 4 (Βαθμός: 3.0)

(Α) Δύο ομάδες A και B μονάδων έχουν συναρτήσεις επιβίωσης $S_A(t) = e^{-\lambda_1 t}$ και $S_B(t) = e^{-\lambda_2 t}$ αντίστοιχα, με $t, \lambda_1, \lambda_2 > 0$.

(i) Βρείτε τη μη δεσμευμένη $S(t)$ και την αντίστοιχη σ.π.π. $f(t)$, όταν η πιθανότητα τυχούσα μονάδα να προέρχεται από την ομάδα A είναι p. Στη συνέχεια (ii) θέτοντας $p = 0.5$ βρείτε τη λογαριθμοποιημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας ως προς τις άγνωστες παραμέτρους λ_1 και λ_2 , όταν υπάρχουν και δεξιά αποκομένες παρατηρήσεις σε δείγμα η παρατηρήσεων από το μοντέλο αυτό.

(Β) Δείξτε πώς με την εκτιμήτρια Kaplan – Meier μπορούμε να κάνουμε μια γραφική εξέταση για το μοντέλο της Κανονικής και της Λογαριθμο-κανονικής κατανομής.

ZHTHMA 5 (Βαθμός: 3.0)

(Α) Τι είναι ένα μοντέλο αναλογικής διωκινδύνευσης (παραμετρικό και ημι-παραμετρικό) και δείξτε πώς μπορούμε να κάνουμε ένα γραφικό έλεγχο καταλληλότητας για αυτό.

(Β) Τι είναι τα υπόλοιπα Cox – Snell; (Γ) Τι είναι τα υπόλοιπα Schoenfeld;

ZHTHMA 6 (Βαθμός: 3.0)

Προσαρμόζεται ένα μοντέλο αναλογικής διωκινδύνευσης του Cox στη διάρκεια θεραπείας (σε ημέρες) 238 ναρκομανών.

(i) Ελέγξτε αν η διάρκεια θεραπείας των ναρκομανών εξαρτάται από τις δύο κλινικές στις οποίες θεραπεύονται (κλινική 1=0 ή κλινική 2=1) και από το αν έχουν εκτίσει ποινή φυλάκισης (ναι=1, όχι=0)

(α) με ένα 0.95 διάστημα εμπιστοσύνης για τους συντελεστές β και

(β) με το κριτήριο AIC στα ακόλουθα μοντέλα:

| Μοντέλο I | | Μοντέλο II | | | |
|-------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|---------------|---------------------|
| Συμμεταβλητές | $\hat{\beta}$ | se($\hat{\beta}$) | Συμμεταβλητές | $\hat{\beta}$ | se($\hat{\beta}$) |
| Κλινική | -1.107 | 0.214 | Κλινική | -1.074 | 0.213 |
| Φυλακή | 0.278 | 0.166 | | | |
| $\hat{\ell} = -688.802$ | | | $\hat{\ell} = -690.207$ | | |

και $\hat{\ell} = -705.662$ για το μοντέλο χωρίς συμμεταβλητές.

(ii) Να ερμηνευτούν τα $e^{\hat{\beta}}$ του τελικού μοντέλου.

(iii) Ενισχύστε τα συμπεράσματά σας με τον έλεγχο log-rank για τις δύο κλινικές ως προς τη διάρκεια θεραπείας των ναρκομανών. [Δίνονται: $V = 34.66$ και $U = \sum_j \{d_{1j} - (n_{1j}d_j/n_j)\} = 31.09$].

ZHTHMA 7 (Βαθμός: 3.0)

(Α) Αν τ.μ. T είναι της Ομοιομόρφου κατανομής $U[0, t_n]$, δείξτε ότι $W = -\ln(T/t_n)$ είναι της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο 1, για δοθέν t_n . $L(t) = \frac{1}{t_n}$ $F(t) = \frac{t}{t_n}$

(Β) Έστω λογισμικό τράπεζας με επαναλαμβανόμενες βλάβες και ενδιάμεσους χρόνους βλαβών σε ώρες $x_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \dots, 8$, $t_0 \equiv 0 : 340, 230, 34, 754, 111, 15, 135, 145$. Με βάση τον έλεγχο 'MIL – HDBK – 189' ελέγξτε την ύπαρξη σταθερού ρυθμού βλαβών (ROCOF).

[Δίνεται ότι $2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln(t_n/T_i) \sim \chi^2_{2(n-1)}$].