

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1 (2 μονάδες):

Έστω X_1, \dots, X_n ($n > 3$) τυχαίο δείγμα από την εκθετική κατανομή με μέση τιμή θ . Θεωρείστε τις παρακάτω εκτιμήτριες του θ : (i) $T_1 = X_1$, (ii) $T_2 = (X_1 + X_2)/2$, (iii) $T_3 = (X_1 + 2X_3)/3$ και (iv) $T_4 = \bar{X}$. Υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα κάθε μίας από τις παραπάνω εκτιμήτριες. Ποια θα επιλέγατε; Μπορείτε να βρείτε αμερόληπτη εκτιμήτρια με διασπορά μικρότερη από τη μικρότερη διασπορά των άνω εκτιμητριών; Εξηγήστε.

ΘΕΜΑ 2 (3.6 μονάδες):

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα ($n > 1$) από την κατανομή με σ.π.π. $f(x) = e^{-(x-\theta)}$, $0 < \theta \leq x < \infty$, όπου θ άγνωστη παράμετρος.

- i) Να ελέγξετε αν η παραπάνω κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ.
- ii) Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση T του θ .
- iii) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π., έστω $\hat{\theta}$, του θ .
- iv) Να βρείτε την σ.π.π. της τ.μ. T .
- v) Να εξετασθεί αν η $\hat{\theta}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια για το θ .
- vi) Να βρεθεί μία στατιστική συνάρτηση $T_1 = g(T)$ η οποία να είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ . Χωρίς να προβείτε σε επιπλέον υπολογισμούς να αποφανθείτε για το εάν η T_1 είναι σίγουρα ΑΕΕΔ;

ΘΕΜΑ 3 (2.4 μονάδες):

Έστω X_1, \dots, X_n ($n > 30$) τυχαίο δείγμα από την Γάμμα κατανομή $G(2, 1/\theta)$, όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.

- i) Να βρεθεί η ΕΜΠ του θ .
- ii) Με την βοήθεια της ανισότητας Cramer-Rao να δείξετε ότι η ΕΜΠ του θ είναι ΑΕΕΔ.
- iii) Να κατασκευαστεί προσεγγιστικό 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το θ .

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες):

Για την εκτίμηση του άγνωστου ποσοστού p που θα λάβει ένα κόμμα Α στις επόμενες εκλογές έστω ότι συλλέξατε τυχαίο δείγμα $n = 15$ ψηφοφόρων. Έστω ότι θέλετε να ελέγξετε την μηδενική υπόθεση $H_0: p = 0.5$ έναντι της εναλλακτικής $H_1: p < 0.5$. Έστω ότι η κρίσιμη περιοχή του εν λόγω ελέγχου είναι η $K = \{y \leq 2\}$, όπου y είναι ο παρατηρούμενος αριθμός των ψηφοφόρων που τάχθηκαν υπέρ του κόμματος Α στο δείγμα.

- i) Να υπολογίζεται το ε.σ. α του άνω ελέγχου.
- ii) Αν το κόμμα Α λάβει τελικά ποσοστό 30% στις εκλογές να υπολογίσετε την πιθανότητα σφάλματος τύπου II για τον άνω έλεγχο.

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ ώρες

ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ