

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

**ΘΕΜΑ 1 (2 μονάδες):**

Α) Έστω οι αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  και  $\psi: \Theta \rightarrow \mathbb{R}^r$ . Τότε, αν η στατιστική συνάρτηση  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_m)$  είναι επαρκής για την παράμετρο  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^r$ , χρησιμοποιώντας το Παραγοντικό Θεώρημα να αποδείξετε ότι η στατιστική συνάρτηση  $\mathbf{T}^* = \varphi(\mathbf{T})$  είναι επίσης επαρκής για την παράμετρο  $\theta^* = \psi(\theta)$ .

Β) Έστω  $W$  αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου  $\theta$ . Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η  $W^2$  αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου  $\theta^2$ .

**ΘΕΜΑ 2 (4 μονάδες):**

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0, \theta)$ , με  $\theta > 0$  άγνωστη παράμετρος.

- i) Να εξετάσετε αν η παραπάνω κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ.
- ii) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π.  $\hat{\theta}$  της άγνωστης παραμέτρου  $\theta$ .
- iii) Να βρεθεί η εκτιμήτρια με την μέθοδο των ροπών  $\tilde{\theta}$  της άγνωστης παραμέτρου  $\theta$ .
- iv) Να εξετασθεί αν η  $\tilde{\theta}$  είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια για το  $\theta$ .
- v) Δείξτε ότι η  $Y = \max X_i, i = 1, 2, \dots, n$  είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση για το  $\theta$ .
- vi) Να βρείτε την σ.π.π. της τ.μ.  $Y$ .
- vii) Να εξετασθεί αν η  $\hat{\theta}$  είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια για το  $\theta$ .
- viii) Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της  $E(X_i)$  με τη βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell.
- ix) Να βρεθεί Α.Ε.Ε.Δ. της  $V(X_i)$  με τη βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell.

**ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες):**

Σε τυχαίο δείγμα από 500 ψηφοφόρους μιας χώρας οι 200 υποστηρίζουν το κόμμα Α.

- i) Να εκτιμήσετε με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας σημειακά το ποσοστό  $p$  που θα λάβει το κόμμα Α στις εκλογές.
- ii) Με την βοήθεια της ανισότητας Cramer – Rao να αποδείξετε ότι η παραπάνω Ε.Μ.Π. είναι Α.Ε.Ε.Δ.
- iii) Να κατασκευαστεί και να υπολογιστεί ένα 96% προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό  $p$ .
- iv) Τι μέγεθος δείγματος πρέπει να έχετε ώστε το εύρος του παραπάνω διαστήματος να είναι το πολύ 5% σε συντελεστή εμπιστοσύνης 0.04;

**ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες):**

Για την εκτίμηση του άγνωστου ποσοστού  $p$  που θα λάβει ένα κόμμα Α στις επόμενες εκλογές έστω ότι συλλέξατε τυχαίο δείγμα  $n = 20$  ψηφοφόρων. Έστω ότι θέλετε να ελέγξετε την μηδενική υπόθεση  $H_0: p = 0.5$  έναντι της εναλλακτικής  $H_1: p < 0.5$ . Έστω ότι η κρίσιμη περιοχή του εν λόγω ελέγχου είναι η  $K = \{y \leq 3\}$ , όπου  $y$  είναι ο παρατηρούμενος αριθμός των ψηφοφόρων που τάχθηκαν υπέρ του κόμματος Α στο δείγμα.

- i) Να υπολογίζεται το ε.σ.-α του άνω ελέγχου.
- ii) Αν το κόμμα Α λάβει τελικά ποσοστό 40% στις εκλογές να υπολογίσετε την πιθανότητα σφάλματος τύπου II για τον άνω έλεγχο.