

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ, 8-6-2017

Θέμα 1. Έστω η καμπύλη

$$c : r(s) = \left(\frac{a}{c} \int_0^s \sin(\theta(\sigma)) d\sigma, \frac{a}{c} \int_0^s \cos(\theta(\sigma)) d\sigma, \frac{b}{c} s \right), \quad a^2 + b^2 = c^2$$

όπου $\theta(s)$ συνεχής συνάρτηση του s , και a, b, c πραγματικές σταθερές, διαφοροί του μηδενός.

(a) Δείξτε ότι s είναι φυσική παράμετρος της καμπύλης c και υπολογίστε το λόγο $\frac{s}{\tau}$.

(b) Ελέγχετε αν η καμπύλη c είναι κυλινδρική έλικα. (Μια ομαλή καμπύλη ονομάζεται γενική ή κυλινδρική έλικα όταν οι εφαπτόμενες ευθείες της σχηματίζουν σταθερή γωνία με δοσμένη σταθερή διεύθυνση.)

Θέμα 2. Έστω η κυλινδρική επιφάνεια $S : r(t, \theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, t)$, $t \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)$.

Προσδιορίστε τις γεωδαισιακές καμπύλες της S και στη συνέχεια προσδιορίστε τη γεωδαισιακή καμπύλη που περνά από το σημείο $(0, R, 1)$ και έχει διεύθυνση $(1, 2)$. $\theta \in \mathbb{R}, t = t(\theta)$ Δινέστε στις $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} = 0$

Θέμα 3. Έστω η επιφάνεια

$$S : r(u, v) = (u + v, uv, u^2v), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Προσδιορίστε τη κάθετη τομή c της επιφάνειας στο σημείο $(2, 1, 1)$, με διεύθυνση $(2, 1)$ και στη συνέχεια προσδιορίστε τη κάθετη καμπυλότητα της c στο σημείο $(2, 1, 1)$.

Θέμα 4. (a) Έστω S^2 η μοναδιαία σφαίρα του \mathbb{R}^3 με κέντρο την αρχή των αξόνων, και έστω $f : S^2 \rightarrow S^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, -x_3 \right)$. Ελέγξτε αν η f είναι ισομετρία.

(β) Άντε $(c) : [\alpha, \beta] \rightarrow S^2$ ομαλή καμπύλη της S^2 , τι σχέση έχουν τα μήκη των καμπυλών $f^{-1}(c), f(c)$;