

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ II & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ»
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. (Φεβρουάριος 2015).

Θέμα 1 (2 βαθμοί): (α) Να διατυπώσετε την άμεση και την έμεση μέθοδο του Euler για το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0$$

(β) Για την άμεση μέθοδο του Euler, να ορίσετε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης (truncation error) T_n και να αποδείξετε με τη βοήθεια του θεωρήματος Taylor, ότι $|T_n| \leq T = \frac{1}{2} h \max_{a \leq x \leq b} |y''(x)|, n = 0, \dots, N-1$. Υποθέστε ότι η λύση y είναι ομαλή και ότι ο διαμερισμός του διαστήματος είναι ομοιόμορφος και μήκους h .

(γ) Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών στο διάστημα $[0, 1]$:

$$y' = \frac{1}{5} y + (1 - 0.2x) \sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x) \\ y(0) = 0$$

Ο τύπος του σφάλματος για την άμεση μέθοδο του Euler (με ομοιόμορφο βήμα) είναι: $|e_n| \leq \frac{T}{L} (e^{L(x_n - x_0)} - 1), n = 0, \dots, N$, όπου L είναι η σταθερά Lipschitz της f ως προς y . Να υπολογιστεί το βήμα h για είναι το σφάλμα στο $x_N = 1$ να είναι μικρότερο από 10^{-4} .

Δίνεται η λύση: $y(x) = x \sin(\pi x)$.

Θέμα 2 (3 βαθμοί): (α) Η γενική k -βηματική μέθοδος έχει τη μορφή

$$\sum_{j=0}^k a_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) \quad \text{όπου } a_j, \beta_j \in \mathbb{R}, a_k \neq 0, a_0^2 + \beta_0^2 \neq 0.$$

Να ορίσετε τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα 1^{ον} και 2^{ον} βαθμού και με την βοήθεια τους να δώσετε τον ορισμό της μηδενικής ευστάθειας και της A-ευστάθειας.

(β) Να μελετήσετε την ακόλουθη k -βηματική μεθοδολογία ως προς την μηδενική ευστάθεια, σύγκλιση, και τάξη σύγκλισης:

$$y_{n+2} - y_n = (h/3)(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$$

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με $f_i = f(x_i, y_i)$ και υποθέτουμε πως η συνάρτηση f είναι ομαλή και οι αρχικές συνθήκες κατάλληλα επιλεγμένες.

$$\text{Υπενθύμιση: } C_p = \sum_{j=1}^k \frac{j^p}{p!} a_j - \sum_{j=1}^k \frac{j^{p-1}}{(p-1)!} \beta_j$$

Θέμα 3 (3 βαθμοί):

(α) Να ορίσετε την ασθενή λύση (λύση μεθόδου Galerkin) για το ακόλουθο προβλήμα συνοριακών τιμών:

$$-\frac{d}{dx}((x+2)\frac{du}{dx}) + u(x) = f(x)$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = e^{-1} + 2$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι ομαλή.

(β) Να ορίσετε τη διακριτή λύση Galerkin, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Galerkin) όταν εφαρμόζεται με γραμμικές κατά τμήματα βασικές συναρτήσεις (τύπου στέγη). Να αποδείξετε ότι οι γραμμικές κατά τμήματα βασικές συναρτήσεις (τύπου στέγη) ανήκουν στο χώρο $H_0^1(0,1)$.

(γ) Δίνεται ο ακόλουθος τύπος σφάλματος για το πρόβλημα των ερωτημάτων (α)-(β):

$$\|u - u^h\|_A \leq \frac{h}{\pi} \left\{ \max_{a \leq x \leq b} p(x) + \frac{h^2}{\pi^2} \max_{a \leq x \leq b} r(x) \right\}^{1/2} \|u''(x)\|_{L^2(a,b)}$$

$$\text{όπου } \|f\|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Να υπολογίσετε το βήμα h (ομοιόμορφη διαμέριση) ώστε το σφάλμα να ικανοποιεί τη σχέση $\|u - u^h\|_A \leq 10^{-2}$ για το πρόβλημα του ερωτήματος (α). Δίνεται $u(x) = xe^{-x} + 1$.

Θέμα 4 (2 βαθμοί):

Να μελετήσετε ως προς τη μηδενική ευστάθεια τη μέθοδο:

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + y_n = (h/4)[(3-a)f_{n+2} + (1-3a)f_n] \text{ για τιμές τις παραμέτρου}$$

$$a \in \mathbb{R}, \quad h \in \mathbb{R}$$

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με $f_i = f(x_i, y_i)$ και υποθέτουμε πως η συνάρτηση f είναι ομαλή και οι αρχικές συνθήκες κατάλληλα επιλεγμένες.

Διάρκεια εξέτασης: 2&1/2 ώρες.

Καλή επιτυχία.