



Εξέταση του μαθήματος **ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

26-06-2015

**Q.1 (1.8 μον.)** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\nu \times \nu$  πίνακα  $A$ , ισχύει  $\rho(A) = \inf \|A\|$  όπου το *infimum* λαμβάνεται για όλες τις νόρμες πινάκων.

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \|A\|_{\infty} \\ \rho(A) &\leq \|A\|\end{aligned}$$

**Q.2 (1.3 μον.)** Έστω ένας  $\nu \times \nu$  πίνακας  $A$  και  $D_A$  ο διαγώνιος πίνακας που έχει ως κύρια διαγώνιο την διαγώνιο του  $A$ . Να αποδείξετε ότι  $\|D_A\|_2 \leq \|A\|_2$ . Οχι σνδ

**Q.3 (1.3 μον.)** Έστω ένας  $\nu \times \nu$  πίνακας  $A$ , με  $s_{\min}(A)$  και  $s_{\max}(A)$  την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι για κάθε διάνυσμα  $x \in \mathbb{C}^\nu$ , ισχύει  $s_{\min}(A)\|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq s_{\max}(A)\|x\|_2$ .

**Q.4 (3 μον.)** Έστω ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ . Με βάση τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ , υπολογίστε έναν πλησιέστερο στον  $A$  πίνακα που να έχει το 0 ως ιδιοτυπή γεωμετρικής πολλαπλότητας 1.

Βαθμού 2 σνδ

**Q.5 (1.3 μον.)** Έστω ένας  $\nu \times \nu$  πίνακας  $A$  και ένας αριθμός  $z \notin \sigma(A)$ . Να αποδείξετε ότι η απόσταση του  $z$  από το φάσμα  $\sigma(A)$  είναι μεγαλύτερη ή ίση της ποσότητας  $\frac{1}{\|(zI_\nu - A)^{-1}\|}$ .

**Q.6 (1.3 μον.)** Έστω ένας  $5 \times 5$  κανονικός πίνακας  $A$ , με φάσμα  $\sigma(A) = \{1+3i, 2-i, 8-4i, 3, 4\}$ . Με βάση τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ , υπολογίστε την απόσταση του  $A$  από τον πλησιέστερό του  $5 \times 5$  πίνακα που έχει πολλαπλή ιδιοτυπή.