

Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης, 6/10/2014

Θέμα 1(α) Έστω \mathbb{N} σύνολο και $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ συνάρτηση.

- (i) Διατυπώστε τα αξιώματα Peano για το ζευγάρι (\mathbb{N}, s) .
 - (ii) Δείξτε ότι $s[\mathbb{N}] = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
 - (iii) Αν $M \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο, δείξτε ότι υπάρχει $\phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ 1-1, επί και αύξουσα.
- (β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο.
- (i) Δείξτε ότι το $-A$ είναι άνω φραγμένο.
 - (ii) Δείξτε ότι $\inf A = -\sup(-A)$.
 - (iii) Δείξτε ότι αν $\inf A \notin A$, τότε το $\inf A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A .

Θέμα 2 (α) Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

- (i) Δώστε τον ορισμό της βάσης περιοχών.
 - (ii) Δείξτε ότι ο X έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών.
 - (iii) Αν $(V_i)_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυψμα για τον X , δείξτε ότι υπάρχει αριθμήσιμο υποκάλυψμα.
- (β) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος.
- (i) Δώστε τον ορισμό του μεμονωμένου σημείου.
 - (ii) Αν ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
 - (1) Για κάθε $x \in X$, τότε $X \setminus \{x\}$ είναι πυκνό.
 - (2) Αν $D \subset X$ αριθμήσιμο, δείξτε ότι ο $X \setminus D$ είναι πυκνό στον X .

Θέμα 3 (i) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\{U_1, \dots, U_n\}$ πεπερασμένη οικογένεια από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X . Δείξτε ότι το $\bigcap_{i=1}^n U_i$ είναι ανοικτό και πυκνό.

- (ii) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος ώστε κάθε σημείο του X είναι σημείο συσσώρευσης του X . Δείξτε ότι ο X είναι υπεραριθμήσιμος.
- (iii) Έστω (X, ρ) συμπαγής αριθμήσιμος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X .

Θέμα 4 Έστω X ένα μη κενό σύνολο.

- (i) Αν $(f_n)_n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, δώστε τον ορισμό της κατά σημείο και της ομοιόμορφης σύγκλισης της $(f_n)_n$ στην f .
- (ii) Δώστε παράδειγμα μιας ακολουθίας συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο και δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.
- (iii) Έστω X άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, κατά σημείο φραγμένες. Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ και υπακολουθία $(f_{n_k})_k$ ώστε να συγκλίνει κατά σημείο στην f .
- (iv) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς και $D \subseteq X$ πυκνό ώστε $(f_n|_D)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f|_D$. Δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε όλο τον X .