

Εξέταση στην «Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα»

Θέμα 1. (2 Βαθμοί) (α) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Να εκτελεστούν δύο επαναλήψεις για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος $Ax=b$, με $b=[6,4,6]^T$ με βάση την επαναληπτική μέθοδο **Jacobi**.

(β) Να υπολογίσετε μια προσέγγιση της νόρμας του επαναληπτικού πίνακα B_J μετά από δύο επαναλήψεις με τη βοήθεια των διαφορών $\delta_j = \|x^{(j)} - x^{(j-1)}\|$. Να υπολογίσετε μία a-posteriori εκτίμηση για το σφάλμα με βάση τις διαφορές δ_j μετά από δύο επαναλήψεις.

Θέμα 2. (2 Βαθμοί) Να ορίσετε τη φασματική ακτίνα πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\rho(A) < 1$ αν και μόνο αν $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \emptyset$.

Θέμα 3. (3 Βαθμοί)

(α) Για το σύστημα $Ax=b$ με $b=[4,5,4]^T$ και πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

να κατασκευάσετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης που αντιστοιχεί στην μέθοδο Jacobi (**JOR**) ως στάσιμη επαναληπτική διαδικασία **Richardson** ($x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k Q^{-1} r^{(k)}$, όπου $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, $a_k = a$). Να υπολογιστεί ο επαναληπτικός πίνακας της παραπάνω διαδικασίας και να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης a , για τις οποίες η **JOR** συγκλίνει. Μπορείτε να επιταχύνετε την επαναληπτική διαδικασία **Jacobi** με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου χαλάρωσης;

(β) Να μελετήσετε τη σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου χαλάρωσης που αντιστοιχεί στην μέθοδο Gauss-Seidel, (**SOR**) για το πρόβλημα του ερωτήματος (α).

Θέμα 4. (3 Βαθμοί) (α) Να περιγράψετε τη μέθοδο των κλίσεων ως γενική επαναληπτική διαδικασία τύπου **Richardson**, για το πρόβλημα $Ax = [5,2,4]^T$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(β) Να εκτελέσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου.

(γ) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο $r^{(k+1)}$ (της $(k+1)$ - επανάληψης) ως συνάρτηση του υπολοίπου $r^{(k)}$ (k - επανάληψης).

(δ) Να ορίσετε την ενεργειακή νόρμα $\|\cdot\|_A$ για τον πίνακα του ερωτήματος (α).
Για αρχικό διάνυσμα $x_0 = [0,0,0]^T$ να υπολογίσετε το πλήθος των επαναλήψεων
ώστε το σφάλμα είναι μικρότερο από 10^{-5} .

Υπόδειξη: $\|e^{(k+1)}\|_A \leq \frac{k_2(A)-1}{k_2(A)+1} \|e^{(k)}\|_A$.

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά.

Καλή επιτυχία.