

Εξέταση στην Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα (Σεπτέμβρης 2012).

**Θέμα 1.** (1 Βάθος) (α) Να ορίσετε τη φασματική ακτίνα πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $\rho(A) < 1$  αν και μόνο αν  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \emptyset$ .

**Θέμα 2.** (2 Βαθμοί) (α) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Να εκτελεστούν δύο επαναλήψεις για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος  $Ax=b$ , με  $b=[9,-2,8]^T$  με βάση την επαναληπτική μέθοδο **Jacobi**.

(β) Να υπολογίσετε μια προσέγγιση της νόρμας του επαναληπτικού πίνακα  $B_j$  μετά από δύο επαναλήψεις με τη βοήθεια των διαφορών  $\delta_j = \|x^{(j)} - x^{(j-1)}\|$ . Να υπολογίσετε μία a-posteriori εκτίμηση για το σφάλμα με βάση τις διαφορές  $\delta_j$  μετά από δύο επαναλήψεις.

**Θέμα 3.** (2 Βαθμοί)

Για το σύστημα  $Ax=b$  με  $b=[3,-2,-3]^T$  και πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

να κατασκευάσετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης που αντιστοιχεί στην μέθοδο Jacobi (**JOR**) ως στάσιμη επαναληπτική διαδικασία **Richardson** ( $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k Q^{-1} r^{(k)}$ , όπου  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ ,  $a_k = a$ ). Να υπολογιστεί ο επαναληπτικός πίνακας της παραπάνω διαδικασίας και να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης  $a$ , για τις οποίες η **JOR** συγκλίνει. Μπορείτε να αυξήσετε την ταχύτητα σύγκλισης επιλέγοντας κατάλληλα την παράμετρο χαλάρωσης;

Υπόδειξη: Αν  $Q$  αντιστρέψιμος και  $Q^{-1}A$  έχει θετικές και πραγματικές ιδιοτιμές τότε η στάσιμη διαδικασία Richardson συγκλίνει αν και μόνο αν:  $0 < a < \frac{2}{\lambda_1}$ ,

όπου  $\lambda_1$  είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του  $Q^{-1}A$ . Επίσης  $a_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$  όπου  $\lambda_1, \lambda_n$

είναι η μεγαλύτερη και η μικρότερη ιδιοτιμή αντιστοίχως.

**Θέμα 4** (2 Βαθμοί) (α) Να περιγράψετε τη μέθοδο των κλίσεων ως γενική επαναληπτική διαδικασία τύπου **Richardson**, για το πρόβλημα  $Ax = [9,2,4]^T$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(β) Να εκτελέσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου.

**Θέμα 5** (3 Βαθμοί) (α) Να υπολογίσετε μία προσέγγιση της μέγιστης (κατά μέτρο) ιδιοτιμής του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

χρησιμοποιώντας 2 επαναλήψεις της μεθόδου των δυνάμεων χρησιμοποιώντας ως αρχικό διάνυσμα το  $x^{(0)} = [1, 0, 0]^T$ .

(β) Να υπολογίσετε μία προσέγγιση της δεύτερης μεγαλύτερης (κατά μέτρο) ιδιοτιμής του πίνακα του ερωτήματος (α) (εκτελώντας 1 μόνο επανάληψη).

(γ) Χρησιμοποιώντας το πηλίκο Rayleigh να βρείτε μία καλύτερη προσέγγιση της ιδιοτιμής του ερωτήματος (α).

**Διάρκεια εξέτασης:** 2 ώρες και 30 λεπτά.

**Καλή επιτυχία.**