

ΘΕΜΑ 1 (MON. 2.5)

Θεωρούμε το γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f, \text{ στο } \Omega \\ Mu = g, \text{ στο } \Gamma \text{ σύνορο του } \Omega \end{cases}$$

Να περιγραφεί αναλυτικά (έως και την κατασκευή του γραμμικού συστήματος) η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων για τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής λύσης του παραπάνω Π.Σ.Τ.

ΘΕΜΑ 2 (MON. 2.5)

Θεωρούμε το πρόβλημα Dirichlet $\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ στο } \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u = 0, \text{ στο } \Gamma \text{ (σύνορο του } \Omega) \end{cases} \quad (1)$

Ορίζουμε τον χώρο συναρτήσεων $V = \{v / v \in C(\bar{\Omega}), \text{ κατά τημήματα } C^1, \text{ με } v=0 \text{ στο } \Gamma\}$. Ακόμα θεωρούμε $B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \, dy$ και $F(v) = \int_{\Omega} fv \, dx \, dy$. Τότε η ασθενής μορφή του προβλήματος Dirichlet γράφεται:

$$\begin{cases} \text{Να βρεθεί } u \in V, \text{ τέτοιο ώστε} \\ B(u, v) = F(v), \forall v \in V \\ u = 0, \text{ στο } \Gamma \text{ σύνορο του } \Omega \end{cases} \quad (2)$$

Στη μέθοδο Galerkin διαλέγουμε έναν προσεγγιστικό υπόχωρο V_n διάστασης n του V και θεωρούμε το ακόλουθο προσεγγιστικό πρόβλημα:

$$\begin{cases} \text{Να βρεθεί } \bar{u}_n \in V_n, \text{ τέτοιο ώστε} \\ B(\bar{u}_n, \varphi) = F(\varphi), \forall \varphi \in V_n \end{cases} \quad (3)$$

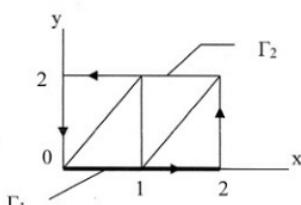
Να διατυπώσετε κατάλληλες ηποθέσεις και να αποδείξετε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας Galerkin, δηλαδή ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\bar{u}_n \in V_n$ που ικανοποιεί την (3).

ΘΕΜΑ 3 (MON. 2.5)

Να υπολογιστούν τα στοιχεία του γραμμικού συστήματος Galerkin για το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -\nabla^2 u + u = x, \text{ στο } \Omega \\ u = 0, \text{ στο } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial r} = 1, \text{ στο } \Gamma_2 \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης πυραμίδες.



ΘΕΜΑ 4 (MON. 2.5)

Να υπολογισθούν τα στοιχεία a_{ij} και τα δεύτερα μέλη b_i του γραμμικού συστήματος $Ac = b$ που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με n συναρτήσεις βάσης στέγες στο ομογενές πρόβλημα που προκύπτει από το μη ομογενές πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών

$$-u'' + xu = 0, \text{ στο } (0,1)$$

$$u(0) = 0, u(1) = 1.$$