

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΙΟΥΝΙΟΣ 2015

1. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα και μοναδικό $\bar{u}_n \in V_n$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$B(\bar{u}_n, \varphi) = F(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_n,$$

όπου $\bar{u}_n = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$ και $\varphi_j, j = 1, \dots, n$ βάση του V_n .

Θεωρείστε ότι για το διγραμμικό συναρτησιακό $B(\cdot, \cdot)$ στο $V_n \times V_n$ ισχύει η υπόθεση ελλειπτικότητας $B(v, v) \geq c \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V, \quad c > 0.$

2. α) Να δοθεί ο ορισμός ενός χώρου Hilbert.

β) Στο χώρο $L^2 \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, να υπολογισθεί η προβολή της συνάρτησης $f(x) = x$ στον υπόχωρο που παράγουν οι συναρτήσεις $\varphi_1(x) = \sin x, \varphi_2(x) = \sin 2x, \varphi_3(x) = \sin 3x$.

Τα ολοκληρώματα να υπολογισθούν με τον απλό τύπο Αριθμητικής ολοκλήρωσης Simpson.

3. Να αναχθεί το πρόβλημα:

$$u^{(4)} + u = 1, \text{ στο } (0, 1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

$$u'(0) = 1, \quad u'(1) = 1$$

στο πρόβλημα:

$$v^{(4)} + v = F, \text{ στο } (0, 1)$$

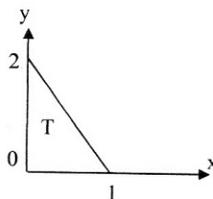
$$v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0$$

με κατάλληλη συνάρτηση F .

4. Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών.

$$-\nabla^2 u + u = x, \text{ στο } \Omega = T$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \text{ στο } \Gamma \text{ (σύνορο του } T)$$



Να εφαρμοστεί η μέθοδος Galerkin με κατάλληλες συναρτήσεις βάσης πυραμίδες και μοναδικό τριγωνικό στοιχείο το τρίγωνο T . Να υπολογιστούν όλα τα στοιχεία του γραμμικού συστήματος που προκύπτει.

Παρατηρήσεις:

- Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
- Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.
- Ερωτήσεις επιτρέπονται τα 10 πρώτα λεπτά της εξέτασης.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ