



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΩΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. Κομίνης (Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ)

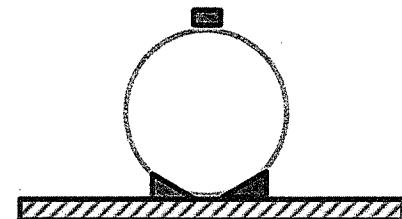
Διάρκεια εξέτασης: 2:45

6/3/2015

Θέμα 1^ο (30%)

Ένα σώμα αμελητέων διαστάσεων βρίσκεται τοποθετημένο πάνω σε μια κυλινδρική επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα.

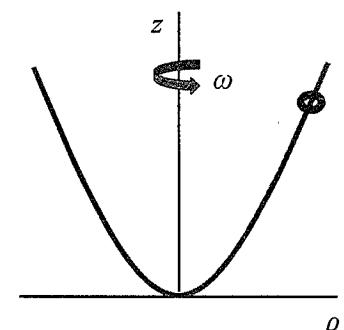
- (α) Να υπολογίσετε την αντίδραση της επιφάνειας στο σώμα με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.
(β) Να υπολογίσετε το ύψος από την οριζόντια επιφάνεια, στο οποίο το σώμα πέφτει αν εκτραπεί από την αρχική του θέση ισορροπίας με μηδενική αρχική ταχύτητα.



Θέμα 2^ο (25%)

Ένα συρμάτινο καλώδιο έχει επίπεδο σχήμα που δίνεται από την εξίσωση $z = A\rho^n$, $n \geq 2$, και είναι τοποθετημένο κατακόρυφα, όπως φαίνεται στο σχήμα, μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο. Το καλώδιο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα z , και ένας δακτύλιος μάζας m μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή περασμένος στο καλώδιο.

- (α) Να βρείτε την Lagrangian του συστήματος.
(β) Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος. Τι συμβαίνει για $n=2$?
(γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Jacobi και να εξετάσετε αν διατηρείται και αν είναι ίσο με την ενέργεια του συστήματος.



Θέμα 3^ο (25%)

Η Lagrangian ενός συστήματος 1^{ος} βαθμού ελευθερίας γράφεται ως εξής:

$$L = \frac{m}{2} \left[\dot{q}^2 \sin^2(\omega t) + \dot{q} q \omega \sin(2\omega t) + q^2 \omega^2 \right]$$

- (α) Να βρείτε την αντίστοιχη Hamiltonian του συστήματος και να εξετάσετε αν διατηρείται.
(β) Χρησιμοποιώντας τη νέα συντεταγμένη $Q = q \sin(\omega t)$, να βρείτε την Lagrangian του συστήματος στις νέες συντεταγμένες και την αντίστοιχη Hamiltonian και να εξετάσετε αν η τελευταία διατηρείται.

Θέμα 4^ο (30%)

Απαντήστε σε 2 από τα παρακάτω ερωτήματα:

- (α) Να βρείτε την έκφραση με αγκύλες Poisson της ολικής χρονικής μεταβολής μιας συνάρτησης $u(q,p)$ στον φασικό χώρο ενός συστήματος 1^{ος} βαθμού ελευθερίας με Hamiltonian H .
(β) Να δείξετε ότι η δυναμική μεταβλητή $u = pq/2 - Ht$ είναι ολοκλήρωμα της κίνησης του συστήματος με συνάρτηση Hamilton $H = p^2/2 - 1/(2q^2)$.
(γ) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός με γεννήτρια συνάρτηση $F_1 = Q/q$ μετασχηματίζει την Hamiltonian $H = 1/(2q^2) + p^2q^4/2$ σε αυτή ενός αρμονικού ταλαντωτή.
(δ) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός $Q = \ln(\sin(p)/q)$, $P = q \cot p$ είναι κανονικός.

Καλή επιτυχία !